

构建初中数学作业设计框架， 提高作业设计和评价的品质^{*}

黄 华¹，顾跃平²

(1. 上海市教委教研室，上海 200041；2. 上海市黄浦区教育学院，上海 200023)

摘要：初中数学作业的设计如何与教学更一致，更具有针对性和解释性？也就是，如何提高初中数学作业的设计品质？要解决此类问题，关键在于构建数学作业设计的框架，从内容、能力、情境三个维度建立设计框架，并进行编码和赋值，使作业的分级成为可能。在具体实施的过程中，教师对这个框架是适应的，且认为是可操作的。

关键词：PISA；作业设计；评价；编码

中图分类号：G633.6 **文献标志码：**A **文章编号：**1000-0186(2013)03-0081-05

2009年4月和2012年4月，上海五千多名15岁的学生参加了由经济合作与发展组织(OECD)发起并组织实施的“国际学生评价项目(PISA)”的正式测试，其中PISA数学素养的测试对改进上海的数学教学和评价有很多的启发。在系统研究PISA数学素养测试的基础上，结合上海市正在开展的提高中小学各学科作业设计和实施的品质、加强作业的解释性、提高作业的目标针对性、提高作业的分层性、实现作业的多样性等研究，我们在黄浦区开展了“构建初中数学作业设计框架，提高作业设计和评价的品质”的研究。

一、作业设计的框架

我们根据初中数学学科的特点与《上海市中小学数学课程标准》，从内容、能力、情境三个维度构建作业设计的框架。为了更充分、细致、科学地刻画作业品质，增强作业的解释性与操作性，方便教师使用和评价，我们进行了编码。

(一) 内容维度(M)

按上海市初中数学学科的内容分成数与运算(M1)、方程与代数(M2)、函数与分析(M3)、图形与几何(M4)、数据整理与概率统计(M5)模块。在各模块中再细分为内容条目(见表1)，涵盖《上海市中小学数学课程标准》规定的初中数学基础型课程内容。

表1

数与运算(M1)	a. 有理数；b. 实数。
方程与代数(M2)	a. 一次方程(组)和一次不等式(组)；b. 整式与分式；c. 一元二次方程；d. 二次根式；e. 简单的代数方程。
函数与分析(M3)	a. 函数及其表示；b. 正比例函数与反比例函数；c. 一次函数；d. 二次函数。
图形与几何(M4)	a. 圆与扇形的初步认识；b. 基本图形的画法；c. 长方体的再认识；d. 图形运动；e. 相交直线与平行直线；f. 三角形；g. 几何证明；h. 四边形；i. 相似三角形；j. 圆与正多边形；k. 锐角三角比；l. 向量初步。
数据整理与概率统计(M5)	a. 概率初步；b. 统计初步。

* 本项目研究成员还有彭拥军、黄岳平、鲁海燕、杨文、张渝、陈晓娟等。

收稿日期：2012-11-28；修回日期：2013-01-15

作者简介：黄华(1957)，男，上海人，中学特级教师，主要从事中学数学课程、教学研究；顾跃平(1968)，男，上海人，中学高级教师，主要从事中学数学教学研究。

(二) 能力维度 (N)

在初中的数学教学中形成的数学能力包括运算求解 (N1)、交流表达 (N2)、推理证明 (N3)、空间观念 (N4)、问题解决 (N5) 五项能力, 再各细分为三个层次 (见表 2)。

表 2

能力层次	a	b	c
运算求解 (N1)	能按照一定的规则和步骤进行数的计算。	能按照一定的规则进行式的变形和运算。	会根据数据处理、选择策略和算理进行数值计算 (会使用计算器)。
交流表达 (N2)	从文字、图形、表格和数学符号中获取基本信息。	用字母表示数与式。	会将文字语言、符号语言和图形语言进行转译。
推理证明 (N3)	能进行简单的说理和判断。	能进行合情推理。	会运用定理、定义等进行逻辑推理证明。
空间观念 (N4)	能识别图形的基本要素, 并会基本的几何画 (作) 图。	理解图形内部和图形之间的联系, 将复杂图形分解为基本图形。	理解图形的平移、旋转、翻折等基本运动。
问题解决 (N5)	能运用数学知识解决数学内部的简单问题。	运用数学模型解决具有社会实际背景的简单问题。	能通过分析, 寻找恰当的解决问题的策略, 并能反思解题过程, 积累经验。

(三) 情境维度 (Q)

作业的设计是以数学课堂教学为基础的, 数学的知识具有连贯性, 必定涉及以前的学习内容或数学知识, 而且需要借助适当的问题背景呈现出来, 所以, 要从知识范围与问题背景两个视角考虑。知识范围按照作业呈现的时间分成与本节课学习内容相关 (Q1)、与本单元学习内容相关 (Q2)、与其他章节学习内容相关 (Q3)、与综合应用学习内容相关 (Q4) 四类; 问题背景分成学校、个人生活 (Q5)、社会生活 (Q6)、融合其他学科 (Q7) 三类 (见表 3)。

表 3

知识范围	与本节课学习内容相关 (Q1)	本课程内容, 不涉及其他知识点。
	与本章节学习内容相关 (Q2)	以本课程内容为主, 涉及本章节的其他学习内容。
	与其他章节学习内容相关 (Q3)	以本课程内容为主, 涉及其他章节的学习内容。
	与综合应用学习内容相关 (Q4)	以本课程内容为主, 涉及多章节知识综合应用的学习内容。
问题背景	学校、个人生活 (Q5)	涉及学生日常的学校、个人生活等。
	社会生活 (Q6)	涉及社会生活, 如生产实践、科学技术、文学、体育、金融等。
	融合其他学科 (Q7)	涉及其他学科知识, 如物理、化学、生物等。

二、作业水平的划分

为了增强作业设计目标与作业设计的适切性, 进一步提高作业框架对教师设计与选择作业的指导性, 以及对所设计的作业进行评价, 我们综合“内容、能力、情境”三个维度, 建立了初中数学作业水平划分方案, 用量化的方法刻画初中数学作业的“水平”。

(一) 计算水平划分综合值 (S)

水平划分综合值 (S) 计算公式如下: $S = 0.2S_M + 0.6S_N + 0.2S_Q$ 。其中, S_M 代表内容维度分值, $S_N = \sum_{i=1}^5 S_{N_i}$ 代表能力维度分值, S_Q 代表情境维度分值。

具体赋值见表 4。

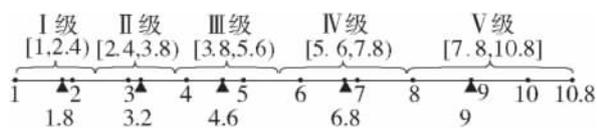
表 4

维度	标准	赋值	
内容维度 (M)	知识点	1 个	1
		2 个	2
		3 个	3
		4 个	4
		4 个以上	5

能力维度 (N)	运算求解 (N1)	N1a	1
		N1b	2
		N1c	3
	交流表达 (N2)	N2a	1
		N2b	2
		N2c	3
	推理证明 (N3)	N3a	1
		N3b	2
		N3c	3
	空间观念 (N4)	N4a	1
		N4b	2
		N4c	3
	问题解决 (N5)	N5a	1
		N5b	2
		N5c	3
情境维度 (Q)	数学内部	Q1	1
		Q2	2
		Q3	3
		Q4	4
	数学外部	Q5	2
		Q6	3
		Q7	4

(二) 作业分级

根据综合值 S, 将作业分成五级, 数值范围如下:



I 级水平: 识记——以复述强化本课 (单元、章、年级) 所学知识内容为主, 表现在作业题设计上是一个指向明确的提问, 不必对所学内容作进一步的加工处理。

II 级水平: 再现——以巩固本课 (单元、章、年级) 所学方法为主, 表现在作业题设计上是相对单一的操作要求, 只需再现课堂教学所学。

III 级水平: 熟练——以强化主要的数学技能为主, 表现在作业题设计上可以是一些核心知识、方法的组合运用, 在知识点上有一定综合性。

IV 级水平: 应用——以形成性训练各类问题的解决能力, 表现在作业题设计上可以是各类问题的解决, 也可以超越学科内容本身与实际相联系。

V 级水平: 综合——用以体验数学思维方式, 表现在作业题设计上可以是一些过程性的问题解决与思考、一些事例现象后数学本质的认识等。

三、作业设计及实施案例

我们对上海市初中数学教科书八年级 (第一学期) 第十九章 “几何证明” 的第三节中 “直角三角形的性质” 单元进行了作业设计, 作为实施案例。

(一) 设计意图

这一单元的教学分三课时, 学生需掌握以下四个定理或推论: 1. 直角三角形两个锐角互余; 2. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半; 3. 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半; 4. 在直角三角形中, 如果一条直角边等于斜边的一半, 那么这条直角边所对的角等于 30° 。

这一单元的教学目标是: 1. 经历探索直角三角形性质的过程, 体会研究图形性质的方法; 2. 掌握直角三角形的性质定理和特殊直角三角形的性质定理, 能运用直角三角形的有关性质作出推理证明, 解决简单的数学问题。

由此, 形成单元作业设计意图: 1. 学生能直观地领会题意, 会对图形进行识别、分解、组合; 2. 在巩固知识的基础上, 结合已掌握的内容, 有所综合; 3. 三课时所配备的三次作业, 前后有相应的连贯性, 呈现先分后合, 先易后难的格局; 4. 对学生能力的要求是: 知方法、明方法、选方法、用方法; 会运用相关的定理、定义证明有关的数学问题。

(二) 制定作业目标

根据设计意图, 细化、分解教学目标; 确定作业的目标、作业的维度、作业题的题型等; 对照作业目标与教学目标, 确保作业的有效性。这一单元三课时的作业目标分别如下。

第一课时: 1. 掌握 “直角三角形的两个锐角互余” 定理; 2. 掌握 “直角三角形斜边上的

中线等于斜边的一半”定理；3. 会应用直角三角形的性质进行简单的证明。

第二课时：1. 掌握直角三角形性质定理的两个推论；2. 初步学会运用直角三角形性质定理的两条重要推论进行简单的几何证明。

第三课时：会灵活运用直角三角形的性质解决数学问题。

(三) 具体作业设计

以第一课时的作业设计为例。

内容要点：1. 直角三角形的两个锐角互余；2. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

作业设计：

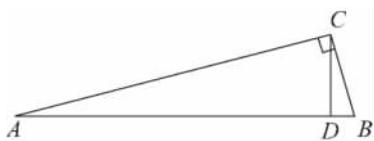


图 1

1. (1) 已知：在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 20^\circ$ ，那么 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 已知：如图 1，在 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边 AB 上的高， $\angle B = 75^\circ$ ，那么 $\angle ACD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 直角三角形中，已知两个锐角的度数差为 20° ，那么这两个锐角的度数分别为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知：在 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是边 AB 的中点。

(1) 如果 $CD = 4$ ，那么 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 如果 $\angle A = 35^\circ$ ，那么 $\angle CDB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

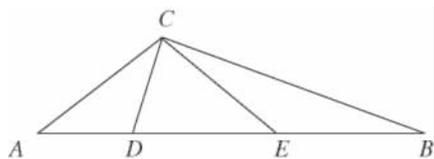


图 2

3. 已知：如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \frac{1}{2}\angle A$ ， $CD \perp BC$ ， CE 是边 BD 上的中线，求证： $AC = \frac{1}{2}BD$ 。

4. 如图 3，已知 AE 与 BD 相交于点 C ， $AB = AC$ ， $DE = DC$ ， M 、 N 、 P 分别为 BC 、

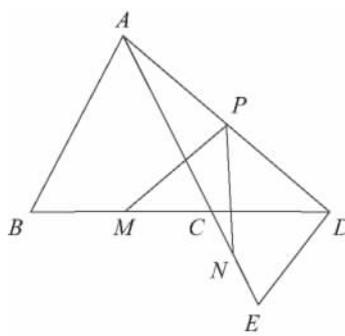


图 3

CE 、 AD 的中点，
求证： $PM = PN$ 。

(四) 水平划分

根据作业设计框架，列表如下：

表 5

题号	维度			S	水平划分	
	内容	能力	情境			
1	(1)	M4g	N2a, N3a	Q1	1.6	I 级
	(2)	M4g	N2a, N3a, N4a	Q1	2.6	II 级
	(3)	M2a, M4g	N1b, N2a, N3a	Q3	3.4	II 级
2	(1)	M4g	N2a, N3a	Q1	1.6	I 级
	(2)	M4f, M4g	N2a, N3b, N4a	Q3	3.4	II 级
3	M4f, M4g	N2c, N3b, N4b	Q3	5.2	III 级	
4	M4f, M4g	N2c, N3c, N4b	Q3	5.8	IV 级	

(五) 具体实施

我们抽取上海市格致初级中学八年级的五十名学生，进行了作业设计实施，每节课后由数学教师发下作业，学生独立完成，自己记录完成每一题的时间，回收后教师批改，统计每人每题的用时和完成情况，计算每一题的平均用时和正确率，把所得数据与设计时设定的作业水平划分值比较，验证单元作业设计是否符合教师设计意图。

以第一课时实施结果为例，结果如表 6：

表 6

题号	S	水平划分	平均用时	正确率 (%)	
1	(1)	1.6	I 级	32 秒	94
	(2)	2.6	II 级	47 秒	92
	(3)	3.4	II 级	72 秒 (1.2 分钟)	96
2	(1)	1.6	I 级	144 秒 (2.4 分钟)	90
	(2)	3.4	II 级	234 秒 (3.9 分钟)	88
3	5.2	III 级	288 秒 (4.8 分钟)	82	
4	5.8	IV 级	456 秒 (7.6 分钟)	48	

(六) 实施结果分析

根据作业设计框架列出的表格中可以看出：第 1、第 2 题内容维度主要是几何证明 (M4g)，能力维度是从文字、图形、表格和数学符号中获取基本信息 (N2a)、能进行简单的说理和判断 (N3a)，情境维度主要是数学内部与本节课堂教学内容密切相关的内容 (Q1)；学生能很快根据性质定理得到答案，解题的正确率 92% 以上。这两题较好地反映了学生对于知识的记忆和巩固情况。第 3 题内容维度是三角形、几何证明，能力维度是会将文字语言、符号语言和图形语言进行转译、能进行合情推理、理解图形内部和图形之间的联系，将复杂图形分解为基本图形，情境维度是数学内部的以本节课内容为主，涉及其他章节的学习内容，实际是等腰三角形判定和直角三角形性质定理的综合应用，部分学生不能充分利用题目中边角间的关系，证明要求提高，用时

增加，正确率为 82%。第 4 题的三个维度与第 3 题基本一样，只是在能力维度上增加了会运用定理、定义等进行逻辑推理证明；并且解题时需要添加两条辅助线，使图形变为具有一个公共斜边的两个直角三角形（还需用等腰三角形的性质）。本题是知识的综合应用，学生用时颇多，正确率仅有 48%。

从本课作业的实施结果看，学生作业所用时间平均 21 分钟，正确率与水平划分值基本相符。第 4 题仍有改进余地，可改为后续课的复习题。

本课的作业设计基本满足：1. 巩固性：练习目标是围绕教学目标的有效实现而设定；2. 基础性：对于基础知识的训练到位，体现学科的基础地位；3. 探究性：通过作业，培养学生良好的思维习惯，通过探究提高学生的数学能力；4. 解释性：经过本次作业诊断，能对学生的数学水平给予分析、认定、解释。

四、需要进一步研究的问题

1. 构建了初中数学作业设计框架，可以促进教师对数学作业设计目标的确定、问题的针对性、课堂教学与作业的一致性有更深入地思考，但需更大范围的实证。

2. 根据综合值 S 对作业的水平进行分级，对能力赋予的权重较高。可以进一步研究的问题还较多，如根据课型配备怎样级别的题目才是合理的，S 值的高低与题目的难度的区别与联系是什么。

(责任编辑：李 冰)

Framework of Junior High School Mathematic Assignment: Improving the Quality of the Design and Evaluation of Assignment

HUANG Hua¹, GU Yueping²

(1. Teaching Research Office, Shanghai Municipal Education Commission, Shanghai 200041, China;

2. Huangpu Institute of Education, Shanghai 200023, China)

Abstract: How can we design mathematics assignment for junior middle school students which will be consistent with classroom teaching with high pertinence and explanation? That is how to improve the design for mathematics assignment in middle school. We believe that the key is to construct a design framework for mathematics assignment. To achieve this, we need to take content, competence and context as the three dimensions to set the framework. With the completion of coding and valuation for each aspect, it is possible to divide the assignments into different levels. Teachers agree the framework is acceptable and feasible either in research process or in operation.

Key words: PISA; mathematics assignment design; evaluation; coding