

一种特殊筝形的性质初探

山东省枣庄市第三十四中 李耀文 李继昌

众所周知,在平面几何课程里,着重研究过两种特殊的四边形:平行四边形(包括矩形、菱形、正方形)和梯形.还有一类特殊的四边形——筝形^[1],这里再介绍的是筝形中较为特殊的一种——有一组对角是直角的(本文中称做“直角筝形”).直角筝形有许多有趣的性质,呈现出极为美妙的对称、和谐之美.这些性质利用等腰三角形、直角三角形、相似三角形等有关知识很容易推证出来.本文对此作一初步研究,以供参考.

设凸四边形 $ABCD$ 为一直角筝形, $AB=BC$, $AD=DC$, $\angle A=\angle C=\text{Rt}\angle$ (如图 1).

关于“直角筝形”,有下面若干性质定理:

定理 1 任何直角筝形都有一个外接圆、一个内切圆和一个旁切圆,这三圆圆心共线(三点共线)(如图 2).

有关一个四边形是否存在外接圆、内切圆和旁切圆?文^[1]作出了肯定的回答,故在此证略.

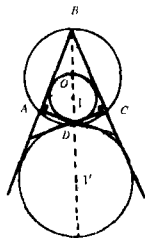


图 2

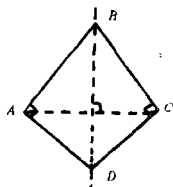


图 3

定理 2 直角筝形 $ABCD$ 的对角线将其分成两个顶角互补的等腰 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$ 和两个全等的 $\text{Rt}\triangle BAD$ 、 $\text{Rt}\triangle BCD$. (证明略,如图 3)

定理 3 直角筝形 $ABCD$ 是轴对称图形,对称轴是对角线 BD 所在的直线. (证明略,如图 3)

定理 4 直角筝形 $ABCD$ 的面积等于其对角线乘积的一半,也等于所夹直角的两边的乘积. (证明略)

定理 5 直角筝形 $ABCD$ 的对角线将其分成四个相似的直角 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$,且这四个直角三角形的外接圆与内切圆半径之和等于两条对角线

之和.

引理 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接 $\odot O$ 的半径 R 等于斜边 BC 的一半,内切 $\odot I$ 的半径 r 等于两直角边 AB 与 AC 之和减去斜边 BC 的差的一半.

证明:如图 4,显然知 $R=$

$OA = \frac{1}{2} BC$, 又,易知四边形

$AEIF$ 是正方形且边长为 r .

$\therefore AE=AF=r$, 从而

$AB+AC=AE+BE+AF+CF=$

$(AE+AF)+(BD+CD)=2r+BC.$

$\therefore r = \frac{1}{2}(AB+AC-BC).$

定理 5 的证明,由定理 1、3 及引理可得.

如图 5, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$, 又 $AD=DC$, $AB=BC$,

$\therefore \text{Rt}\triangle APB \cong \text{Rt}\triangle BPC \cong \text{Rt}\triangle CPD \cong \text{Rt}\triangle DPA.$

$\sum_{i=1}^4 R_i + \sum_{i=1}^4 r_i = \frac{1}{2} AB$

$+ \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} DA$

$+ \frac{1}{2} (AP+BP-AB) + \frac{1}{2} (BP$

$+CP-BC) + \frac{1}{2} (CP+DP-CD) + \frac{1}{2} (DP+AP-DA)$

$= (AP+PC) + (BP+PD) = AC+BD.$

定理 6 直角筝形 $ABCD$ 中,顶点 B 、 D 关于对角线 AC 的对称点,分别是对角线 AC 分其筝形所成两个等腰 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$ 的垂心.

证明:如图 6(a)中,设 H 点是顶点 D 关于 AC 的对称点,连 AH 、 CH 并分别延长交 CB 、 AB 于 E 、 F ,则 $\angle 1=$

$\angle 2, \angle 3=\angle 4.$

又 $\angle 1+\angle BAC=\angle 3+\angle BCA=\text{Rt}\angle$, $\angle BAC=$

$\angle BCA,$

$\therefore \angle 2+\angle BAC=\angle 4+\angle BCA=\text{Rt}\angle.$

$\therefore \angle AEC=\angle CFA=\text{Rt}\angle,$

即 $AE \perp BC, CF \perp AB.$

又,点 H 是 AE 、 CF 的交点,

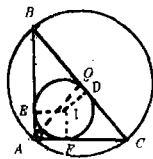


图 4

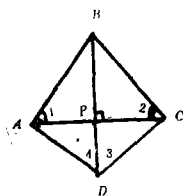


图 5

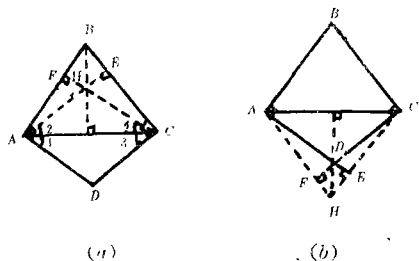


图 6

∴ 点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

由图 6(b), 同样可证点 B 关于 AC 的对称点 H 是 $\triangle ADC$ 的垂心.

定理 7 直角筝形 $ABCD$ 的对角线 AC 将其分成的两个等腰 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$ 的面积之乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ADC}$ 是一个定值.

证明: 如图 5, 对角线 AC 、 BD 交于点 P , 则有 $AC \perp BD$, $AP = CP$.

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ADC} &= \left(\frac{1}{2} AC \cdot BP\right) \times \left(\frac{1}{2} AC \cdot DP\right) \\ &= \frac{1}{4} AC^2 \cdot (BP \cdot DP). \end{aligned}$$

又 $\angle A = \angle C = \text{Rt}\angle$, 由射影定理得

$$BP \cdot DP = AP^2 = CP^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{1}{16} AC^4 (\text{定值}).$$

例 1 设 H 是等腰三角形 ABC 的垂心, 在底边 BC 保持不变的情况下, 让顶点 A 至底边 BC 的距离变小, 这时乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ADC}$ 的值变小、变大, 还是不变? 证明你的结论. (1993 年全国初中数学联赛试题)

此题在文[2]中给出的 13 种证法较为繁琐, 而利用定理 6、7 可直接得到结论.

证明: 如图 7, 显然四边形 $ABH'C$ 是直角筝形且 BC 为一直角线, ∴ 由定理 7 可直接得 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC} = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle H'B'C} = \frac{1}{16} BC^4$.

由于 BC 保持不变, 所以当 A 到 BC 的距离变小时, 乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}$ 保持不变.

定理 8 直角筝形 $ABCD$ 的对角线将其分成的四个相似的直角 $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPD$ 、 $\triangle DPA$ 的外心组成一个矩形, 内心组成一个等腰梯形.

证明: 如图 8, 设 O_i 、 P_i ($i=1, 2, 3, 4$) 分别表示四个直角二

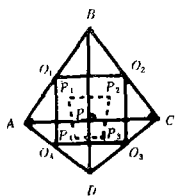


图 8

角形的外心及内心.

由三角形中位线定理及本文定理 3, 得

$$\left. \begin{aligned} O_1O_2 &\parallel AC, O_1O_2 = \frac{1}{2} AC \\ O_1O_4 &\parallel BD, O_1O_4 = \frac{1}{2} BD \\ P_1P_4 &= P_2P_3 \\ AC &\perp BD \\ O_1O_2 &\perp BD \\ O_3O_4 &\perp BD \\ P_1P_2 &\perp BD \\ P_3P_4 &\perp BD \end{aligned} \right\} \begin{cases} \text{① 四边形 } O_1O_2O_3O_4 \\ \text{是矩形;} \\ \text{② 四边形 } P_1P_2P_3P_4 \\ \text{是等腰梯形.} \end{cases}$$

定理 9 直角筝形 $ABCD$ 的四边中点及由对角线的交点引四条边的垂线的四垂足在同一圆上 (八点共圆).

引理 内接于圆的四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 垂直相交于点 K , 经过点 K 的直线与边 AD 、 BC 分别相交于点 H 和 M , 则 (1) 如果 $KH \perp AD$, 那么 $CM = MB$; (2) 如果 $CM = MB$, 那么 $KH \perp AD$.

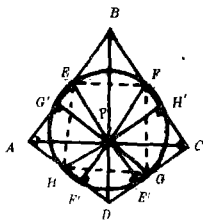


图 9

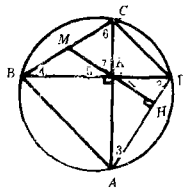


图 10

证明: 如图 10.

(1) ∵ $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 = \text{Rt}\angle$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

又 $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 5$,

$$\therefore \angle 4 = \angle 5. \text{ 同理, } \angle 6 = \angle 7.$$

从而 $BM = MK = MC$, 即 $CM = MB$.

(2) 反之亦然.

定理 9 的证明, 由引理及定理 8 可获证. 四边形 $EFGH$ 是矩形 (必有外接圆), 为此以矩形 $EFGH$ 的对角线 EG (或 FH) 为直径作外接圆 (如图 9), 在此圆上必有以 EG 和 FH 为弦所对的直角顶点. 又 ∵ $EF' \perp CD$ 、 $FF' \perp AD$ 、 $GG' \perp AB$ 、 $HH' \perp BC$,

∴ 点 E' 、 F' 、 G' 、 H' 在 $\odot EFGH$ 上.

故此, E 、 F 、 G 、 H 、 E' 、 F' 、 G' 、 H' 八点共圆.

定理 10 直角筝形 $ABCD$ 的内切圆, 切四边的四个切点组成一个对角线互相垂直的等腰梯形.

证明: 如图 11, 由切线长定理, 得

$$AE = AH, BE = BF, CF = CG, DG = DH.$$

又 $AB=BC, AD=DC$,

$\therefore \text{Rt}\triangle EAH \cong \text{Rt}\triangle FCG \Rightarrow$

$EH=FG \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow EF \parallel GH$ (考虑为什么 $EF \neq GH$) \Rightarrow 四边形 $EFGH$ 是等腰梯形.

又 $\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ$

$\therefore \frac{1}{2} \angle B, \angle 7 = \angle 8 = 90^\circ$

$-\frac{1}{2} \angle D, \angle B + \angle D = 180^\circ, \therefore \angle 5 + \angle 8 = \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle B + \angle D) = 90^\circ.$

由此可见, $\angle GPF = 90^\circ$, 即 $EG \perp FH$.

定理 11 直角筝形 $ABCD$ 中, 在边 AB, BC 上各取一动点 P, Q , 连 PQ 使其满足关系 $PQ = AP + CQ$ (即 $\triangle BPQ$ 的周长 = 定值 $(AB + BC)$), 再连 DP, DQ , 若 $\angle B = \theta$, 则 $\angle PDQ$ 的大小是一定值 $(90^\circ - \frac{\theta}{2})$.

证明: 如图 12, 延长 QC' 至 P' , 使 $CP' = AP$, 连结 BP' , 易知 $\text{Rt}\triangle PAD \cong \text{Rt}\triangle P'CD$.

$\therefore DP = DP', \angle 1 = \angle 3.$

又 $PQ = AP + CQ = CP' + CQ = QP', DQ = DQ,$

$\therefore \triangle DPQ \cong \triangle DP'Q.$

$\therefore \angle PDQ = \angle P'DQ,$

即 $\angle 2 + \angle 3 = \angle PDQ = \angle 1 + \angle 2.$

$\therefore \angle PDQ = \frac{1}{2} \angle ADC.$

又 $\angle ADC + \angle B = 180^\circ, \angle B = \theta,$

故 $\angle PDQ = \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ (定值).

例 2 四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC, \angle A = \angle C = 90^\circ, \angle B = 135^\circ, K$ 为 AB 上一点, N 为 BC 上一点. 若 $\triangle BKN$ 的周长等于 AB 的 2 倍, 求 $\angle KDN$ 的度数. (1993 年北京市中学生数学竞赛初中二年级初试试题).

解: $\because \angle B = 135^\circ, \therefore$ 由定理 11 可直接得出结果 $\angle KDN = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B = 22.5^\circ.$

例 3 如图 13, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, $\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120^\circ$ 的等腰三角形. 以 D 为顶点作一个 60° 角, 角的两边分别交 AB 于 M , 交 AC 于 N , 连结 MN , 形成一个 $\triangle AMN$. 求证: $\triangle AMN$ 的周长等于 2. (1991 年北京市中学

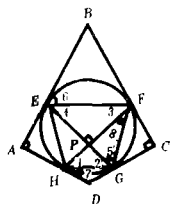


图 11

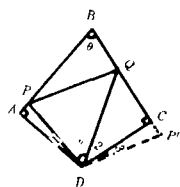


图 12

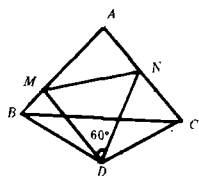


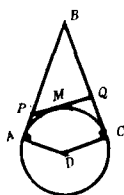
图 13

生数学竞赛初中二年级复试试题)

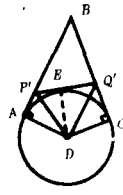
此题在文[3]中给出 6 种证法, 这里从略.

而从例 3 结论说明: 定理 11 的逆命题亦是真命题, 请读者自己证明.

定理 12 直角筝形 $ABCD$ 中, 有一动线段 PQ , 其两端点 P, Q 分别落在边 AB, BC 上 (不重合于 B, C), 使所成的 $\triangle BPQ$ 的周长一定 $(= AB + BC)$, 则必有以顶点 D 为圆心, 以 DA 为半径的 $\odot D$ 切于 PQ (图 14(a)).



(a)



(b)

图 14

证明: 如图 14(b), $\because BA \perp AD, BC \perp CD, AD = DC,$

\therefore 以顶点 D 为圆心, 以 DA 长为半径作 $\odot D$, 这时 $\odot D$ 必与 AB, CB 相切, 切点分别为 A, C . 此时, 过 $\odot D$ 在直角筝形 $ABCD$ 内部的 \widehat{AC} 上任意一点 E , 作 $\odot D$ 的切线 $P'EQ'$, 分别交 AB 于 P' , 交 CB 于 Q' , 连结 $P'D, Q'D, ED$, 则根据切线长定理, 容易推知 $P'Q' = AP' + CQ'$, 再由定理 11, 得 $\angle P'DQ' = \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B.$

又 \because 定理给出的条件是 $\triangle PDQ$ 的周长 $= AB + BC$, 可知 $PQ = AP + CQ$, 即

$\angle PDQ = \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B.$

由此说明, 符合定理条件的线段 PQ 必在所作 $\odot D$ 的切线 $P'EQ'$ 上, 故此定理获证.

从而, 定理还表明: 动线段 PQ (满足 $PQ = AP + CQ$, 即 $\triangle BPQ$ 的周长 $= AB + BC$) 切于某圆的切点 M 形成的轨迹是以 D 为圆心, 以 DA 长为半径且在直角筝形 $ABCD$ 内部的一段圆弧 \widehat{AC} (如图 14(a)).

综上所述, 足以说明“直角筝形”是一个不平凡的图形. 事实上, 这个图形还有许多值得探讨的东西, 有待数学爱好者进一步努力, 从而发现更多妙趣横生的命题.

参考文献

- [1] 梁绍鸿, 赵慈庚. 初等数学复习及研究 (平面几何). 人民教育出版社, 1978
- [2] 吕建恒. 一道探索性命题的证明思路及方法. 中学数学教学参考, 1993, 8
- [3] 邓本良. 构造法证平几竞赛题一例. 中学数学教学参考, 1993, 7