



中考题中的“筝形”赏析

浙江省台州市白云学校(318000)张安军

两组邻边分别相等的四边形为“筝形”，由于这一新定义四边形形同风筝的形状，故得名为“筝形”，“筝形”的图形简洁、对称美观，近年来受到命题专家的喜爱，频频闪亮在近年的中考试卷里。基于命题的立意不同，虽同一图形，但考察的内涵却精彩纷呈。笔者搜集了几则关于“筝形”的考题，供师生们学习参考。

一、注重基础知识的立意



例1 (2015年广东梅州)如图1，已知 $\triangle ABC$ 。按如下步骤作图：①以A为圆心，AB长为半径画弧；②以C为圆心，CB长为半径画弧，两弧相交于点D；③连结BD，与AC交于点E，连结AD，CD。

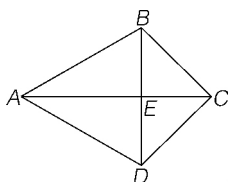


图1

- (1)求证： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ；
(2)若 $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ， $AC = 4$ ，求BE的长。

解 (1)由画图①、②知， $AB = AD$ ， $BC = CD$ 。因为AC为公共边，故 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 。

(2)由 $AB = AD$ ， $BC = CD$ 知， $BD \perp AC$ ，在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle BEC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，故 $BE = EC$ ， $AE = \sqrt{3}BE$ ， $AC = AE + EC = BE + \sqrt{3}BE$ ，设 $BE = x$ ，则有 $x + \sqrt{3}x = 4$ ，解得 $x = 2(\sqrt{3} - 1)$ 。因此 $BE = 2(\sqrt{3} - 1)$ 。

评析 由作图得知两组邻边相等为“筝形”，第(1)小题证明了以AC对角线分成的两个三角形全等，以此为基础可进一步推得“筝形”是以对角线AC为对称轴的轴对称图形，借助直角三角形就可解得BE的长，解决第(2)小题的主要根据是知道“筝形”是一个轴对称图形，对角线互相垂直。

二、注重审美的立意



例2 (2014年山西)阅读以下材料，并按要求完成相应的任务。

几何中，平行四边形、矩形、菱形、正方形

和等腰梯形都是特殊的四边形，大家对于它们的性质都非常熟悉，生活中还有一种特殊的四边形——筝形。所谓筝形，它的形状与我们生活中风筝的骨架相似。定义：两组邻边分别相等的四边形，称之为筝形，如图2，四边形ABCD是筝形，其中 $AB = AD$ ， $CB = CD$ 判定：①两组邻边分别相等的四边形是筝形；②有一条对角线垂直平分另一条对角线的四边形是筝形。显然，菱形是特殊的筝形，就一般筝形而言，它与菱形有许多相同点和不同点如果只研究一般的筝形(不包括菱形)，请根据以上材料完成下列任务：

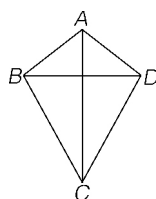


图2

(1)略；
(2)请仿照图3的画法，在图4所示的 8×8 网格中重新设计一个由四个全等的筝形和四个全等的菱形组成的新图案，具体要求如下：

(1)略；

(2)请仿照图3的画法，在图4所示的 8×8 网格中重新设计一个由四个全等的筝形和四个全等的菱形组成的新图案，具体要求如下：

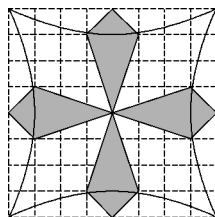


图3

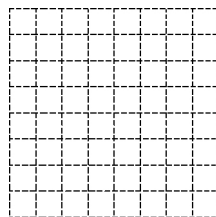
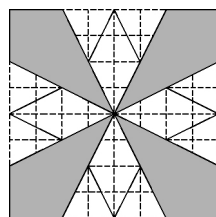
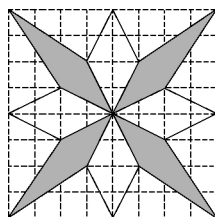


图4

- ①顶点都在格点上；
- ②所涉及的图案既是轴对称图形又是中心对称图形；
- ③将新图案中的四个筝形都涂上阴影(建议用一系列平行斜线表示阴影)。

解 (2)以下仅供参考(见图5)：



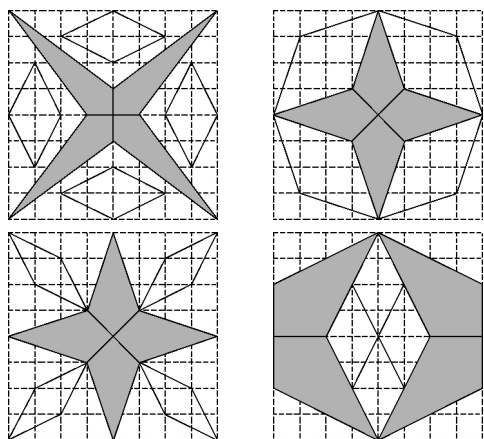


图 5

评析 以美丽的“筝形”为基本图形,设计既是中心对称又是轴对称漂亮的图案,做题的过程也是一个美的创造过程. 由于 8×8 的正方形的格纸,可以作出四条对称轴,它的对称中心是对称轴的交点.“筝形”又是一个轴对称图形,这样把“筝形”的一个顶点绕中心对称点旋转 45° 或 45° 的倍数旋转就可得到符合要求的图形. 解决此题的关键是抓住 8×8 的正方形对称中心和四条对称轴.

三、注重探究的立意

例 3 (2015 年广州中考题)如图 6, 四边形 $OMTN$ 中, $OM=ON$, $TM=TN$, 我们把这种邻边相等的四边形称为筝形.

(1) 试探究筝形 $OMTN$ 对角线之间的位置关系, 并证明你的结论.

(2) 在筝形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=AD=5$, $BC=CD$, $BC>AB$, BD 、 AC 为对角线, $BD=8$.

①如图 7, 若存在一个圆使得 A 、 B 、 C 、 D 四个点都在这个圆上, 求出这个圆的半径;

②如图 8, 过点 B 做 $BF \perp CD$, 垂足为 F , BF 交 AC 于点 E , 连接 DE , 当四边形 $ABED$ 为菱形时, 求点 F 到 AB 的距离.

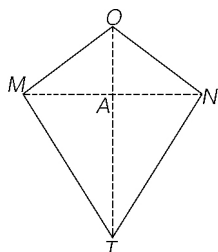


图 6

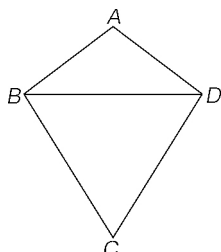


图 7

解 (1) $OT \perp MN$, 证略.

(2) $r = \frac{25}{6}$. 在图 9 中, 由 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

得到 $\angle ABC = \angle ADC$, 四边形 $ABCD$ 四点共圆的条件是 $\angle ABC$ 、 $\angle ADC$ 互补, 故 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $AB = 5$, $BE = 4$, 因此 $AE = 3$. 由 $\triangle ABE \sim \triangle ACB$, $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$, $AC = \frac{25}{3}$, 所以 $r = \frac{25}{6}$.

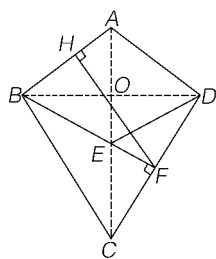


图 8

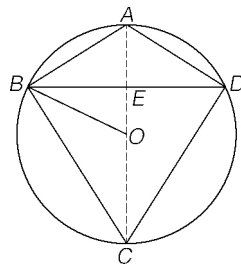


图 9

(3) 在图 8 中, 因为四边形 $ABED$ 是菱形, $AB = BE = 5$, 由题意知

$\triangle OBE \sim \triangle FBD$, $\frac{BF}{BD} = \frac{BO}{BE}$, $BO = 4$, $BE = 5$, $BD = 8$, 解得 $BF = \frac{32}{5}$. $S_{\text{菱形} ABED} = \frac{1}{2} AE \times BD = AB^2 \sin \angle ABE$, 得到 $\sin \angle ABE = \frac{24}{25}$, 在

$\text{Rt} \triangle HBF$ 中, $HF = BF \sin \angle ABE = \frac{768}{125}$.

评析 以探究的方式展开对“筝形”的探索, 先猜想“筝形”的二对角线的位置关系, 然后加以验证; 继续进行, 根据“筝形”的四点共圆来探索外接圆半径; 当构造的四边形为菱形时, 进一步探讨“筝形”一组对边的高. 解题的核心是利用“筝形”的对角线互相垂直, 然后巧用勾股定理和三角函数.

四、注重综合应用的立意

例 4 (2015 年淮安) 阅读理解:

如图 10, 如果四边形 $ABCD$ 满足 $AB=AD$, $CB=CD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 那么我们把这样的四边形叫做“完美筝形”. 将一张如图 10 所示的“完美筝形”纸片 $ABCD$ 先折叠成如图 11 所示的形状, 再展开得到图 12, 其中 CE 、 CF 为折痕,

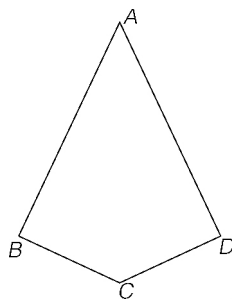


图 10

(下转第 39 页)

④ $\beta = (2\theta + \alpha) - 360^\circ$;

⑤ $\beta = \alpha - 2\theta$;

⑥ $\beta = 2\theta - \alpha$.

当两个角 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 的边分别垂直时, $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, 以 $\angle AOB$ 是锐角为例, 有以下 4 种情形:

(1) 情形 1 中的逆时针

(如图 8), 此时 $\beta = \alpha$;

(2) 情形 1 中的顺时针(如图 9), 此时 $\beta = \alpha$;

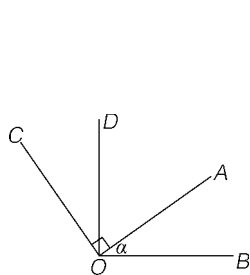


图 8

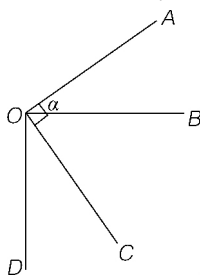


图 9

(3) 情形 2. 2(如图 10), 此时 $\beta = 360^\circ - (\alpha + 2 \times 90^\circ) = 180^\circ - \alpha$;

(4) 情形 3. 3(如图 11), 此时 $\beta = 2 \times 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

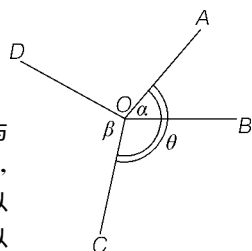


图 7

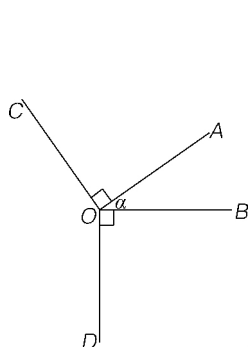


图 10

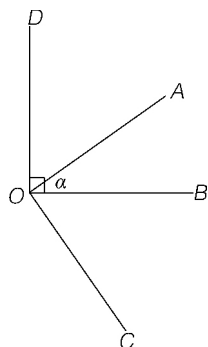


图 11

所以, 两个角的两条边分别垂直时对应的结论是前面提出问题的特殊情况, 也可以验证两个角的两条边分别平行时对应的结论也是特殊情况. 看到这个结果, 我兴奋不已, 深深体会到了“一般化”的魅力. 老师又建议我能不能将问题再进行一般化: 已知 $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle COD$, 如果 $\angle AOC = \theta_1$, $\angle BOD = \theta_2$, 那么 α , β 有什么样的关系? 有了前面的经验之后, 我相信可以用类似的方法得到结果, 于是, 我又锲而不舍地投入到这个问题的探究中去了……

(责审 韩乐琴)

(上接第 41 页)

$\angle BCE = \angle ECF = \angle FCD$, 点 B' 为点 B 的对应点, 点 D' 为点 D 的对应点, 连接 EB' 、 FD' 相交于点 O .

简单应用

(1) 在平行四边形、矩形、菱形、正方形四种图形中, 一定为“完美筝形”的是_____;

(2) 当图 12 中的 $\angle BCD = 120^\circ$ 时, $\angle AEB' =$ _____°;

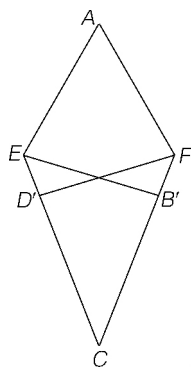


图 11

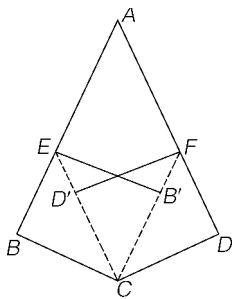


图 12

(3) 当图 11 中的四边形 $AECF$ 为菱形时, 对应图 12 中的“完美筝形”有 _____ 个(包含四边形 $ABCD$)

拓展提升

当图 12 中的 $\angle BCD = 90^\circ$ 时, 连接 AB' , 请探求 $\angle AB'E$ 的度数, 并说明理由.

解 (1) 正方形; (2) 80° ; (3) 5 个;

拓展提升: 图 12 中当 $\angle BCD = 90^\circ$, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\angle A = 90^\circ$, 由于 $\angle B = \angle EB'C = 90^\circ$; 这样四边形 $AEB'F$ 四点共圆, 又因为 $AE = AF$, 得到 $\angle AEF = \angle AFE = \angle AB'E = 45^\circ$.

评析 对“筝形”增强一个内角为 90° , 那么这样的“筝形”就变成了“完美筝形”. 在阅读理解的基础上由简至难, 层层推进. 解决此题的充分利用“完美筝形”有一组对角为 90° , 同时应用“完美筝形”折叠前后的对应元素相等寻找等量关系.

(责审 曹付生)