

探究“筝形”的性质与判定

人大附中(100080) 陆剑鸣

亲爱的同学,你放过风筝吗?一手拿着线轴,一手拉着长线,眼睛紧紧地盯着自己放飞的风筝.风筝在空中颤颤悠悠,翩翩起舞,向着蓝天,向着白云……

课本学习中没有学习过“筝形”,“筝形”是特殊的四边形.这里,我们用探究平行四边形、矩形和菱形的思路与方法(可见文[1]、[2]、[3])探究一下“筝形”.

什么叫筝形呢?

一、定义 有两组邻边分别相等的四边形叫筝形.

如图 1, 四边形 $ABCD$ 是筝形, 则 $AB = AD$, $BC = DC$; 反之, 若 $AB = AD$, $BC = DC$, 则四边形 $ABCD$ 是筝形.

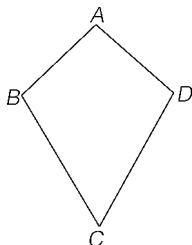


图 1

显然, 菱形、正方形都是特殊的筝形. 由筝形的定义, 容易推出一般筝形有如下性质.

二、性质

1. 边: 有两组邻边分别相等; (如图 1 中, $AB = AD$, $BC = DC$)

2. 角: 有一组对角相等; (如图 1 中, $\angle B = \angle D$)

对角线: (1) 对角线互相垂直 (如图 2 中, $AC \perp BD$); (2) 其中一条对角线平分另一条对角线 (如图 2 中, AC 平分 BD); (3) 其中一条对角线分别平分一组对角. (如图 2 中, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$)

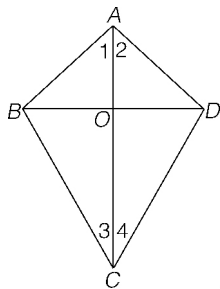


图 2

4. 对称性: 筝形为轴对称图形, 对称轴为不相等的一组对角的对角线所在直线.

三、判定

怎样判定一个四边形是筝形呢? 怎样寻找判定筝形的方法呢?

在文[1]、[2]和[3]中, 曾介绍了探究平行

四边形、矩形和菱形判定的方法.

由筝形的定义得: 有两组邻边分别相等的四边形是筝形.

由于判定一个四边形是筝形需要两个条件. 这里我们从边、角和对角线中选取两个条件去探究. 为了更清晰和条理, 不重不漏, 我们列表探究如下:

表 1 必选取“有一组邻边相等”的条件

| 边 | 角或对角线 | 编号 | 命题的真假 |
|--------|------------------------------|----|-------|
| 一组邻边相等 | 一组对角相等(非相等邻边的夹角) | 1 | 真 |
| | 对角线互相垂直 | 2 | 真 |
| | 一条对角线(过这组相等邻边夹角的顶点)平分另一条对角线 | 3 | 真 |
| | 一条对角线(过这组相等邻边夹角的顶点)被另一条对角线平分 | 4 | 假 |
| | 一条对角线平分相等邻边所夹角 | 5 | 真 |
| | 一条对角线平分相等邻边所夹角的对角 | 6 | 假 |

同学们按照表 1 中的顺序和条件写出文字命题, 并判断这些命题的真假. 对于真命题给出证明; 对于假命题举一反三. 这里选取其中两个进行讨论, 余下的请读者自己完成.

命题 1 有一组邻边相等, 一组对角相等(非相等邻边的夹角)的四边形是筝形.(真命题)

已知: 如图 3, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D$. 求证: $BC = CD$.

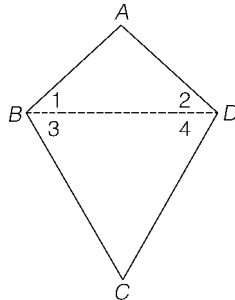


图 3

证明 连接 BD . 因为 $AB = AD$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$. 又因为 $\angle ABC = \angle ADC$, 所以 $\angle 3 = \angle 4$, 所以 $BC = CD$.

命题 4 有一组邻边相等, 过这组邻边夹

角的顶点的对角线被另一条对角线平分的四边形是筝形.(假命题)

反例,如图4,在四边形中, $AB=AD$, $AO=OC$,符合命题4的条件,但它不是筝形.

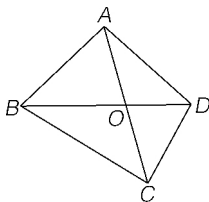


图4

表2 必选取“有一组对角相等”的条件

| 角 | 对角线 | 编号 | 命题的真假 |
|--------|----------------------|----|-------|
| 一组对角相等 | 对角线互相垂直 | 7 | 真 |
| | 一条对角线平分另一组对角中的一个内角 | 8 | 真 |
| | 一条对角线平分过一组相等对角顶点的对角线 | 9 | 假 |

命题7 有一组对角相等,对角线互相垂直的四边形是筝形.(真命题)

已知:如图5,四边形ABCD中, $\angle ABC = \angle ADC$, $AC \perp BD$.求证: $AB=AD$, $BC=CD$.

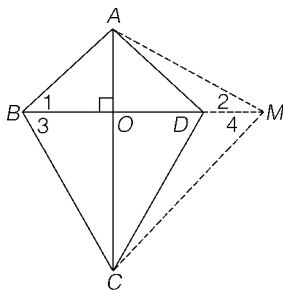


图5

证明 在射线OD上截取 $OM=OB$,连接AM,MC.因为 $AC \perp BD$,所以 $AB=AM$, $CB=CM$,进而 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,所以 $\angle ABC = \angle AMC$,又 $\angle ABC = \angle ADC$,所以 $\angle AMC = \angle ADC$,又M在射线OD上,所以M、D重合.AC垂直平分BD,所以 $AB=AD$, $BC=CD$.(M落在线段OD上同理可证)

命题9 有一组对角相等,一条对角线平分过一组相等对角顶点的对角线的四边形是筝形.(假命题)

反例,如图6,在平行四边形ABCD中,一定有 $\angle ABC = \angle ADC$, $OB=OD$,符合命题9的条件,但它不是筝形.

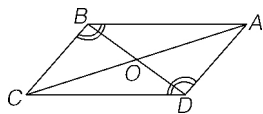


图6

表3 只选取“对角线”的条件

| 对角线 | 编号 | 命题的真假 |
|----------------------------|----|-------|
| 互相垂直,一条对角线平分一个内角 | 10 | 真 |
| 一条对角线垂直平分另一条对角线 | 11 | 真 |
| 一条对角线平分一组对角 | 12 | 真 |
| 一条对角线平分一个内角,且这条对角线平分另一条对角线 | 13 | 真 |

命题13 一条对角线平分一个内角,且这条对角线平分另一条对角线的四边形是筝形.(真命题)

已知:如图7,四边形ABCD中, $\angle 1 = \angle 2$, $BO=OD$.求证: $AB=AD$, $BC=CD$.

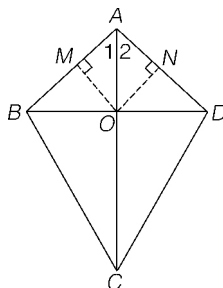


图7

证明思路 作 $OM \perp AB$ 于M, $ON \perp AD$ 于N.

易证 $\triangle AMO \cong \triangle ANO$ (AAS),

$AM=AN$, $OM=ON$,

$\triangle MBO \cong \triangle NDO$ (HL),

$BM=DN$,

所以 $AB=AD$,

所以 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, $BC=CD$.

其余命题请读者自己思考并证明.

通过以上探究,我们得到了筝形的一些性质和判定,这些“结论”并不要求同学们记忆和应用.重要的是要体会其探究的过程和探究的方法,即怎样一步一步地通过列表、分类、证明、举反例等步骤.对一个简单图形的性质与判定进行探究.

参考文献

- [1] 陆剑鸣.探究平行四边形的判定.中学生数学,2014.8(下);
- [2] 陆剑鸣.探究矩形的判定.中学生数学,2014.9(下);
- [3] 陆剑鸣.探究菱形的判定.中学生数学,2014.10(下).

(责审 韩乐琴)