

学校代码: 10270

分类号: G42

学号: 172502728

# 上海师范大学

## 硕士专业学位论文

### 在用字母表示数的教学中融入数学 史知识的行动研究

学 院: 数理学院

专业学位类别: 教育硕士

专 业 领 域: 学科教学(数学)

研 究 生 姓 名: 李星星

指 导 教 师: 陆新生、常磊

完 成 日 期: 2019 年 3 月

## 论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外,不包含其他人或机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中做了明确的声明并表示了谢意。

作者签名: 李星星 日期: 2019.6.6

## 论文使用授权声明

本人完全了解上海师范大学有关保留、使用学位论文的规定,即:学校有权保留送交论文的复印件,允许论文被查阅和借阅;学校可以公布论文的全部或部分内容,可以采用影印、缩印或其它手段保存论文。保密的论文在解密后遵守此规定。

作者签名: 李星星 导师签名: 陈新丁 日期: 2019.6.6

## 摘要

“用字母表示数”作为整式的第一课时，是学生学习代数式的重要基础，如何帮助学生理解“用字母表示数”的各种意义，一直以来都是教师教学的难题。新课程标准中已将数学文化放在一个比较重要的地位，要求数学教师在课堂中多融入数学文化元素，提高学生的人文素养。“用字母表示数”这一内容有着丰富的数学史知识，本研究试图设计出数学史融入“用字母表示数”的教学课例，探索一种能改善“用字母表示数”的教学方法，希望通过数学史的恰当融入，不仅帮助学生更好地学习“用字母表示数”的知识，又可以让学生获得积极的情感体验，树立正确的数学观。

本研究试图将“用字母表示数”的发展史融于教学中，主要考察融入数学史的教学设计能否促进学生对“用字母表示数”的理解和认知？对学生的情感、态度、价值观能否产生积极的影响？

本文采用行动研究法，研究数学史融入“用字母表示数”的教学实践。行动研究法是一种将课堂教学中的教学理论与教学实践结合起来，从而提供有效教学的一种方法，也是促进课程改革和教师发展的有效途径之一。本研究进行了两轮，每一轮研究都经历计划、行动、反馈、反思四个过程。第一轮课堂实施后，结合课堂实录、专家教师的意见以及调查问卷的结果进行了教学设计改进，改进后的教学设计用于第二轮的研究。

通过课堂观察、问卷调查、访谈，我们得出：数学史的融入让学生了解到“用字母表示数”发生发展的过程；学生仿照历史，经历“用字母表示数”的三个重要发展阶段，帮助学生理解“用字母表示数”的意义；丢番图、韦达等人的故事让学生体会到知识发展的曲折和数学家们的勇敢，提高了学生的学习自信心和坚持不懈的学习态度。

**关键词：**用字母表示数；数学史；课堂教学；行动研究

## Abstract

“Letters replacing numbers” as the first lesson of integral expression is an important basis for students to learn algebraic expression. How to help students understand the various meanings of the “letters replacing numbers” is a difficult problem for teachers. The new curriculum standards has been put mathematical culture in an important position, it requires math teachers to integrate cultural elements of mathematics in the classroom, to improve students' cultural literacy. The content of “representing numbers by letters” has a rich knowledge of the history of mathematics. This study attempts to design a teaching case in which the history of mathematics is integrated into the number of letters, and explores a method to improve the teaching of numbers in letters, hoping to integrate properly through the history of mathematics. It not only helps students to better learn the knowledge of numbers, but also gives students a positive emotional experience and establishes a correct mathematical view.

The present study attempts to integrate the development history of “letters replacing numbers” into teaching and mainly investigates. Whether this kind of teaching design can improve students' understanding and cognition of “letters replacing numbers”? Whether it can have a positive impact on students' emotions, attitudes and values?

This research uses the action research method to study the teaching practice of integrating mathematics history into letters replacing numbers. The action research method is a method that can combine the teaching theory and teaching practice in classroom teaching to provide effective teaching, and is also one of the effective ways to promote curriculum reform and teacher development. The research was conducted in two rounds, each of which went through four processes: planning, action, feedback, and reflection. After the first round of classroom implementation, the teaching design was improved in combination with the classroom recordings and the opinions of the expert teachers and the results of the questionnaire. Then, the improved teaching design was used for the second round of research.

Through classroom observations, questionnaires, and interviews, we conclude that: The integration of mathematics history assists students to understand the development history of letters replacing numbers; Following the history and experiencing three important development stages of “letters replacing numbers” can

help students understand the deep meaning of it; The stories of Diophantine, Veda and others allow students to experience the twists and turns of knowledge development and learn the courage of mathematicians, which improves students' self-confidence and persistent learning attitude.

**Keywords:** Letters replacing numbers; History of mathematics; Classroom teaching; Action research

# 目录

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 摘要.....                    | I  |
| Abstract.....              | II |
| 目录.....                    | IV |
| 第 1 章 绪论.....              | 1  |
| 1.1 研究背景.....              | 1  |
| 1.1.1 认知障碍.....            | 1  |
| 1.1.2 教学现状.....            | 2  |
| 1.2 研究问题.....              | 5  |
| 1.3 研究意义.....              | 5  |
| 第 2 章 理论基础与文献综述.....       | 7  |
| 2.1 HPM 研究.....            | 7  |
| 2.1.1 什么是 HPM.....         | 7  |
| 2.1.2 HPM 教学设计原则.....      | 7  |
| 2.1.3 HPM 应用方式.....        | 8  |
| 2.1.4 HPM 教学设计分析框架.....    | 9  |
| 2.2 “用字母表示数”发展的三个阶段.....   | 10 |
| 2.2.1 修辞代数阶段.....          | 10 |
| 2.2.2 缩略代数阶段.....          | 11 |
| 2.2.3 符号代数阶段.....          | 11 |
| 2.3 “用字母表示数”教学研究.....      | 12 |
| 2.3.1 国内“用字母表示数”教学研究.....  | 12 |
| 2.3.2 国外“用字母表示数”的教学研究..... | 13 |
| 2.4 数学史融入数学教育研究.....       | 14 |
| 2.4.1 国内数学史融入数学教育的研究.....  | 14 |
| 2.4.2 国外数学史融入数学教育研究.....   | 15 |
| 2.5 文献综述小结.....            | 15 |
| 第 3 章 研究设计.....            | 17 |
| 3.1 研究方法.....              | 17 |
| 3.2 研究对象.....              | 17 |
| 3.3 研究工具.....              | 18 |
| 3.3.1 调查问卷.....            | 18 |

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 3.3.2 访谈提纲.....             | 19 |
| 第4章 研究过程.....               | 20 |
| 4.1 数学史融入“用字母表示数”教学设计一..... | 21 |
| 4.1.1 教学设计背景.....           | 21 |
| 4.1.2 教学设计意图.....           | 22 |
| 4.1.3 教学设计内容.....           | 24 |
| 4.2 反馈分析.....               | 27 |
| 4.2.1 学生问卷反馈分析.....         | 27 |
| 4.2.2 教师访谈反馈分析.....         | 34 |
| 4.2.3 课堂实录反馈分析.....         | 37 |
| 4.3 反思.....                 | 41 |
| 4.4 数学史融入“用字母表示数”教学设计二..... | 42 |
| 4.4.1 教学设计意图.....           | 43 |
| 4.4.2 教学设计内容.....           | 43 |
| 4.5 反馈分析.....               | 47 |
| 4.5.1 学生问卷反馈分析.....         | 47 |
| 4.5.2 教师访谈反馈分析.....         | 52 |
| 4.5.3 学生访谈反馈分析.....         | 54 |
| 4.5.4 课堂实录反馈分析.....         | 56 |
| 第5章 结论与启示.....              | 60 |
| 5.1 融入数学史的教学设计对学生的影响.....   | 60 |
| 5.2 教学启示.....               | 61 |
| 参考文献.....                   | 62 |
| 附录A 测试卷一.....               | 65 |
| 附录B 测试卷二.....               | 66 |
| 附录C 第一轮研究课堂实录.....          | 67 |
| 附录D 第二轮研究课堂实录.....          | 72 |
| 攻读学位期间取得的研究成果.....          | 76 |
| 致谢.....                     | 77 |



## 第1章 绪论

### 1.1 研究背景

在研究背景中, 首先介绍选择“用字母表示数”作为论文研究课题的原因; 其次, 展示北师大版和沪教版教材“用字母表示数”的安排以及《全日制义务教育数学课程标准》(修改稿)中对“用字母表示数”的要求; 最后分析“用字母表示数”内容的教学现状。

培养学生的数学文化素养已经越来越受到重视, 数学史作为数学文化的重要内容也被越来越多的人关注, 将数学史融入数学教学中, 让知识自然呈现, 使学生感受知识的发生发展过程, 帮助学生更好的记忆、理解, 从而突出重点, 突破难点, 都是 HPM 领域中需要解决的问题。

#### 1.1.1 认知障碍

字母是英语里的基本元素, 数是数学里的基本元素, 字母怎么能够表示数呢? 难道是把字母像英语单词一样赋予一定的意义翻译过来的吗? 那为什么它不是表示某一个特定的数, 而是一个字母可以表示任意一个有意义的数呢? 笔者在与学生进行非正式交流时, 发现这是很多学生在学习这部分时遇到的疑惑, 以至于他们在解题时, 只要遇到含有字母的式子就不知道如何正确计算。

笔者在中学学习这部分内容时, 也觉得很“奇怪”, 凭什么一个小小的字母就可以表示任意一个数, 既然这样, 只需要用一个字母就可以把数字表示完, 古人还那么费力的发明数字干嘛? 对于一个字母我们每个人都有自己心中表示的数, 那我们还怎么正常交流? 虽然笔者现在也确实感受到了“用字母表示数”这个伟大的研究给我们生活带来的便利, 但心中还是有着或多或少的困惑, 感觉“用字母表示数”始终有着神秘的面纱。

另外, 一些研究也表明认知障碍是学习者个体认知学习和发展的障碍<sup>[1]</sup>, 在学习“用字母表示数”时, 许多人有着认知障碍, 比如很难接受字母是一个数, 认知障碍阻碍头脑中框架的变化<sup>[2]</sup>, 因此, 可以按照概念形成的历史帮助学生一步步学习, 了解学生的认知障碍。M·克莱因曾说过: “数学史是数学学习的指南。”陈静安, 黄启亮, 凡加云等在发表的中学生对“字母表示数”认知发展的历史相似性研究中表示七年级和高一学生对“用字母表示数”的理解仍停留在第一和第二阶段, 在第三阶段出现了认知困难。这与“用字母表示数”的历史发展进程非常相似, 符合比利亚、克莱因、斯宾塞等人关于“个体知识发生过程必然遵循人类知识发生过程”的原理以及汪晓勤、蒲淑萍等人的相关研究结论<sup>[3][4]</sup>。

带着这么多的困惑, 笔者非常希望可以在“用字母表示数”这一知识上进行



深入研究，争取为一线教师提供可以为学生解决诸多疑惑的成功案例，为学生理解这部分内容带来有意义的帮助。

1.1.2 教学现状

课程标准是一线教师进行教学的重要依据，现行的课程标准中关于“用字母表示数”有如下要求：

在《全日制义务教育数学课程标准》（修改稿）中有关数与代数部分提到“在数与代数的教学中，应帮助学生建立数感和符号意识，发展运算能力，树立模型思想。”其中“符号意识”主要是指“能够理解并且运用符号表示数、数量关系和变化规律，知道使用符号可以进行一般性的运算和推理。”《标准》中还提到“模型也是数与代数的重要内容，方程、方程组、不等式、函数等都是基本的数学模型<sup>[5]</sup>。”这里的“符号意识”就要求学生首先能充分理解字母表示数的意义，其次不仅要能够运用字母符号来进行简单的计算，还要与实践相结合，学会“模型”的思想。上海的学生在小学就会接触到简单的方程和公式，即简单的字母表示数，而《标准》对于初中学生有着更高的要求，不仅要理解字母表示数，还要会用字母符号来把实际问题符号化、模型化，这样才是真正的用数学解决问题。

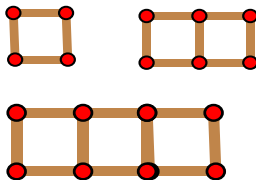
教材是教师开展教学活动，学生学习的重要参考和依据，教师可以根据教材的内容进行教学设计，北京和上海作为国内的一线城市，教育无疑也是走在时代前列的，下面笔者对沪教版和北师大版中“用字母表示数”的内容进行分析。

表 1-1 沪教版教材中“用字母表示数”内容基本情况

| 相关章节目录   | 篇幅 | 引入方式   | 数学史 |
|--|----|--|-----|
| 第九章 整式<br>第一节 整式的概念<br>9.1 “用字母表示数”<br>9.2 代数式<br>9.3 代数式的值<br>9.4 整式<br>第二节 整式的加减<br>9.5 合并同类项<br>9.6 整式的加减<br>第三节 整式的乘法<br>9.7 同底数幂的乘法<br>9.8 幂的乘方<br>9.9 积的乘方 | 4  | 分别用五个问题：<br>1. 交换律： $a+b=b+a$<br>( $a$ 、 $b$ 表示任意常数)<br>2. 三角形面积公式：<br>$s=\frac{1}{2}ah$ ( $a$ 表示三角形的底， $h$ 表示三角形的高)<br>3. 圆面积公式： $s=\pi r^2$<br>( $r$ 表示圆半径)<br>4. 求解圆的半径。<br>解：设圆的半径为 $r$ 。<br>5. 用若干个大小相同的小正方形，依次拼成 | 无   |

|   |  |   |  |
|---|--|---|--|
| 9.10 整式的乘法<br>第四节 乘法公式<br>9.11 平方差公式<br>9.12 完全平方公式<br>第五节 因式分解<br>9.13 提取公因式法<br>9.14 公式法<br>9.15 十字相乘法<br>9.16 分组分解法<br>第六节 整式的除法<br>9.17 同底数幂的除法<br>9.18 单项式除以单项式<br>9.19 多项式除以单项式<br>本章小结<br>探究活动一 一组平均数规律的探究<br>探究活动二 探究能被3、9整除的数的规律<br>阅读材料<br>贾宪三角<br>拓展<br>多项式除以多项式---<br>长除法 |  | 大的正方形，第 $n$ 个大正方形需要几个小正方形拼成？<br>引出字母表示数，并说明字母可以表示任意数。 |  |
|---|--|---|--|

表 1-2 北师大版教材中“用字母表示数”内容基本情况

| 相关章节目录  | 篇幅 | 引入方式   | 数学史 |
|---|----|--|-----|
| 第三章 整式及其加减<br>1. 字母表示数<br>2. 代数式<br>3. 整式<br>4. 整式的加减 | 3  | <br>首先展示上图，搭一个正方 | 无   |

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| <p>5. 探索与表达规律</p> <p>回顾与思考</p> <p>复习题</p> |  | <p>形需要 4 根火柴。</p> <p>问：（1）搭两个正方形需要几根火柴？搭 3 个这样的正方形需要几根火柴？</p> <p>（2）搭 100 个这样的小正方形呢？</p> <p>（3）搭 100 个这样的小正方形需要多少根火柴？你是怎样得到的？</p> <p>（4）搭 <math>x</math> 个这样的小正方形需要多少根火柴？</p> <p>引导学生用字母表示正方形个数和火柴根数之间的关系。</p> <p>引出字母可以表示任意数。</p> |  |
|---|--|--|--|

可以看出，沪教版教材和北师大版教材在代数式内容的处理上，更多是从数学知识体系的角度来考虑的。北师大版教材从搭 1 个正方形需要 4 根火柴出发设置问题，问题由具体的数字到抽象的字母，从而引出字母表示任意数。沪教版教材中关于用字母表示数的内容在开始就设置了五个问题，通过这五个问题引导学生回忆旧知，让学生明白“用字母表示数”究竟是要学习怎样的知识。这两个版本的教材设计都没有提到数学史的有关内容。

字母表示数的概念在整个义务教育阶段数学的教与学中都是很重要的内容。理解好字母表示数的概念是从算数学习到代数学习的基础，对之后高等数学的学习也是必要的。然而，为了让学生在短时间内就掌握这一工具性概念，很多中外教科书都把如此基础又有多重含义的概念概述成很简单的定义。比如沪教版的数学课本通过几个问题就说明字母可以表示任意数、表示特定意义的公式、表示符合条件的某一个数、表示具有某些规律的数。总之，字母可以简明地将数量关系表示出来。而在之后的学习中虽还有大量字母表示数的应用却再也没有对字母表示数这个概念做相应的补充，这使得初中学生对字母表示数这个概念并没有完整而系统的认识，甚至在这个“做题为上”的学习氛围中觉得这个概念是可有可无的，对解题并没有很大的帮助。

实际上，大部分学生都是在还没理解清楚字母表示数是怎么一回事的时候就要进行大量的练习，所以很多刚接触字母表示数的学生都会把字母单单理解成未

知数,而字母表示任意数的习题在经过稍加练习之后也能被学生简单、自动的模仿。当然随着学生代数学习的深入,也许他们对字母表示数的理解会通过自己的不断概括、归纳而得到提升,但是按照现行课程,他们在整个初中阶段都会很难对这一工具性概念有深刻的认识。在这样的背景下,鉴于“数学核心素养”又强调对学生情感态度价值观的培养,重视知识的生活性、实用性,因此将数学史融入“用字母表示数”按照知识的发生发展过程进行教学设计显得尤为重要。

近几年,网上也有很多关于“用字母表示数”的教学设计,其中也有一部分是利用重构式进行教学设计将数学史融入课堂教学的。比如蔡宏圣的《小学数学教学设计的新视角——以“用字母表示数”的教学设计为例》<sup>[6]</sup>,就是利用数学史融入课堂的重构式设计的,笔者在研究生数学史的课堂上,按照蔡宏圣老师的教学设计进行了“用字母表示数”的课堂展示,老师和同学们都一致认为这种教学方式比传统讲解更容易理解。孙洲发表的“HPM 视角下的字母表示数”的教学设计从一道经典例题“已知两个数的和与差,求这两个数”出发,根据“用字母表示数”发展的三个阶段进行教学,文章反馈中教学效果明显<sup>[7]</sup>。

这些设计和研究都有值得我们借鉴的地方,但蔡宏圣老师的教学设计是关于小学阶段“用字母表示数”的,孙洲发表的文章也只是一个教学片段,因此,对初中阶段数学史融入“用字母表示数”的研究还是非常必要的。

## 1.2 研究问题

在当前教育现状下,针对老师和学生在“用字母表示数”的教与学上的困惑以及基于“用字母表示数”发展的丰富史料,本研究确定如下研究问题:

1. 融入数学史的教学设计能否促进学生对“用字母表示数”的理解和认知?
2. 对学生的情感、态度、价值观能否产生积极的影响?

## 1.3 研究意义

“用字母表示数”作为整式的第一课时,是学生学好代数内容的重要基础,但七年级学生在理解“用字母表示数”上存在很大的困难,他们容易理解字母表示未知数,但很难理解字母表示任意数,这与“用字母表示数”在历史发展上出现的困难一致。因此,教师在教学时就可以依照“用字母表示数”的历史发生发展过程进行教学设计,使学生经历知识从萌芽到成熟最后形成体系的过程,帮助学生一步步跨越认知障碍。

数学史融入课堂教学不仅可以培养学生学习数学的理性精神还可以增进学生对数学的理解,感受数学的美学魅力。在课堂引入环节,插入与课堂内容有关

的数学小故事或者数学家的逸闻趣事可以提高学生的数学学习兴趣,借机向学生讲述数学家们在探索数学知识时经历的艰辛,使学生明白我们现在学习的数学“成果”都是数学家们经过上千年的探索形成的,从而,珍惜数学知识并学有所用,让每一个数学知识都能够在生活中发挥它的“光”与“热”,体会知识的实用性,感受数学来源于生活又为生活而服务。学生感受数学家们在探索新知识的过程中也会出现各种各样的失误,数学家们和我们一样都会犯错,只是他们永不言弃,从而培养学生勇于探索的精神和坚持不懈的品质。

数学史融入课堂虽然给教学带来了很大的益处,但很多一线教师对数学史这些作用的了解还是很浅显。笔者实习期间在和身边的同事交流数学史时,发现很多教师对数学史在课堂上的利用都存在很大的误解,大多数教师都认为在课堂上利用数学史就是讲一个数学小故事、活跃一下课堂气氛,在内容理解上没有任何帮助,而且还会占用课堂时间;部分教师认为将数学史融入课堂,学生能够感受到数学家在探索数学知识时的不易,进而提高学生的自豪感和学习自信心;几乎没有教师意识到可以依照数学知识发生发展的过程进行教学帮助学生理解。因此,笔者希望可以开发出数学史融入课堂教学的优秀课例,并通过有效的评价让更多的教师看到数学史融入课堂的效果。

## 第2章 理论基础与文献综述

### 2.1 HPM 研究

HPM 研究包括 HPM 简介、HPM 教学设计方法、HPM 应用方式以及 HPM 教学设计的分析框架。

#### 2.1.1 什么是 HPM

HPM 是英语单词 History and Pedagogy of Mathematics 的缩写，表示数学史与数学教育关系的统称。HPM 主要研究数学史是如何促进数学教育的，它是数学教育研究的重要组成部分。它的含义主要有两个方面：一方面是指在国际数学教育大会上专门用来讨论数学史和数学教育融合的研究团体，另一方面是指这个研究团体的研究对象即“数学史如何与数学教育融合在一起共同促进学生的发展<sup>[8]</sup>”。在 1972 年，数学史与数学教育关系国际研究小组成立，标志着 HPM 成为一个学术研究领域<sup>[9]</sup>。

随着对 HPM 关注的人越来越多，它的教育价值逐渐被人们所发现。汪晓勤教授在《HPM 的历史渊源》中写道：“数学史对数学教育的意义已经得到许多西方数学教育家的认可，将数学史融入数学教学可以激发学生的学习兴趣，培养学生的数学精神，启发学生的人格成长，预见学生的认知发展，指导并丰富教师的课堂教学，促进学生对数学的理解和对数学价值的认识，构筑数学与人文之间的桥梁<sup>[9]</sup>。”之后，数学史的教育作用被越来越多的人接受和认可。

#### 2.1.2 HPM 教学设计原则

在数学史融入数学教学进行教学设计过程中，需要查找大量的数学史资料，这些史料中，有些是可以直接拿来使用的，而有些过于生僻并且晦涩难懂缺乏趣味性，这样的史料就需要加工整理，使之符合学生的认知成为学生喜欢的素材。数学史融入课堂的目的是帮助学生理解知识的概念、内涵和本质，而不是哗众取宠。张小明，汪晓勤教授在《中学数学教学中融入数学史的行动研究》中建议：“数学史能够提升学生的学习兴趣，仍建议以‘融入’的方式为主，在教学上应以课本为主，对于选取的数学史材料宜做适度的筛选和剪裁，以防对学生造成负面效果<sup>[10]</sup>。”

汪晓勤教授在《HPM 视角下的角平分线教学》中提出 HPM 教学设计的五个

原则即：“趣味性、科学性、有效性、可学性、新颖性<sup>[11]</sup>。”

表 2-1 HPM 视角下教学设计五原则

| 教学设计的原则 | 含义                     |
|---------|------------------------|
| 趣味性原则   | 教学内容不能生搬硬套，必须符合趣味性     |
| 科学性原则   | 教学内容不能胡乱改编，必须符合科学性     |
| 有效性原则   | 教学内容应能够有效地完成三维目标，符合有效性 |
| 可学性原则   | 教学内容要符合学生的认知基础，符合可学性   |
| 新颖性原则   | 教学内容有新意、有特色，符合新颖性      |

- 基于这些原则，笔者的研究中紧紧围绕这五个原则进行教学设计：
1. 引入部分呈现原始的数学史料，讲述“用字母表示数”发展史上相关数学家的故事。
  2. 将数学史隐性融入数学课堂，根据史料改编数学问题，巧妙的再现知识发生发展的过程。
  3. 从学生实际情况出发，对知识发生发展的过程和教学内容进行重构，使得数学史料符合学生的学情，达到帮助学生理解促进学生情感、态度、价值观积极发展的目的。

2.1.3 HPM 应用方式

汪晓勤教授将国内外关于 HPM 的应用方式进行整合和改进在《HPM 的若干研究与展望》中写道：“关于数学教学中运用数学史的方法，我们将国外已有的几种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类<sup>[12]</sup>。”

附加式的应用是在课堂上讲一些与新授内容有关的数学家的逸闻趣事或者展示相关数学家的图片；复制式的使用方式是使用者对历史上的相关题目、解题方法以及运用的解题思想不需要加工，直接使用；顺应式是根据史料，合理改编数学问题；重构式是对知识发生发展的过程进行重构<sup>[12]</sup>。四种应用方式如下表：

表 2-2 HPM 融入课堂的四种方式<sup>[8]</sup>

| 类别   | 附加式                    | 复制式           | 顺应式         | 重构式          |
|------|------------------------|---------------|-------------|--------------|
| 具体内容 | 展示相关数学家的图片，讲述相关数学家的轶事。 | 直接采用历史上的案例、解法 | 根据史料，编制数学问题 | 重构知识发生、发展的历史 |



|      |              |      |      |      |
|------|--------------|------|------|------|
| 运用方式 | 直接运用，去掉后没有影响 | 直接运用 | 间接运用 | 间接运用 |
|------|--------------|------|------|------|

2.1.4 HPM 教学设计分析框架

通过对大量的案例进行开发和研究，汪晓勤教授进一步完善了自己的研究，并在此基础上总结出了用来分析 HPM 教学设计的分析框架，即“一个视角、两座桥梁、三维目标、四种方式、五项原则”，这使得我们在做 HPM 教学设计和案例分析时有了系统的依据<sup>[13]</sup>。

表 2-3 HPM 教学设计的分析框架

| 框架   | 内涵                    |
|------|-----------------------|
| 一个视角 | 历史的视角                 |
| 两座桥梁 | 沟通历史与现实的桥梁、沟通数学与人文的桥梁 |
| 三维目标 | 知识与技能、过程与方法、情感和信念     |
| 四种方式 | 附加式、复制式、顺应式、重构式       |
| 五项原则 | 科学性、趣味性、新颖性、可学性、有效性   |

一个视角：历史的视角。

荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔（H.Freudenthal,1905-1990）曾说：“数学史是一个不断进步的系统化的学习过程，儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始。从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史<sup>[14]</sup>。”

两座桥梁：沟通历史与现实的桥梁、沟通数学与人文的桥梁。

在数学史上，新的概念、新的方法、新的思想以及新的理论都是在使用已有知识无法解决当前问题的情况下出现的，这体现了发生教学法的思想。在数学课堂上，教师讲授新的方法或者传递新的思想也是在学生面对一些使用已有知识无法解决的问题，感到有学习新方法或者新理论的必要时教师才开始讲授的。因此，数学史是发生教学法的重要基础<sup>[15]</sup>。

著名科学史家萨顿（G.Sarton,1884-1956）曾说：“在旧人文主义者和科学家之间只有一座桥梁，那就是科学史。建造这座桥梁是我们这个时代的主要文化需要。”因此，我们在进行数学教学时，应该利用数学史搭建起数学与人文的这座桥梁，关注隐藏在数学知识背后的人文元素，在数学课堂中设计古今对照等教学

活动,带领学生感悟古人的思想方法,了解数学概念发生发展的艰难与曲折,欣赏数学家们的个人魅力,从而,有效培养学生的科学人文精神。

三维目标:知识与技能、过程与方法、情感态度价值观。

知识与技能、过程与方法、情感态度价值观是数学课堂需要达到的三个基本教学目标。将数学史融入数学课堂进行教学设计也应该以这三个教学目标为依托并接受该目标达成情况的检验。大量数学史融入数学课堂的案例均表明,将数学史融入数学课堂进行教学设计有助于三维教学目标的达成。

四种方式:附加式、复制式、顺应式和重构式。

附加式和复制式的应用比较简单,属于直接应用。顺应式和重构式需要对数学史料进行加工整理,这两种应用方式对教师的挑战也是比较大的,但也有很多利用顺应式和重构式开发成功的案例,甚至很多案例四种方式都进行了应用。

五项原则:科学性、趣味性、新颖性、可学性和有效性。

HPM 教学设计基本上都是遵循这五项原则进行,并且大量案例的教学效果显示,在这五项原则的指引下收效良好。

## 2.2 “用字母表示数”发展的三个阶段

### 2.2.1 修辞代数阶段

1842 年, G.H.F.内塞尔曼(Nesselman)把代数学符号化分为三个阶段。第一个阶段是用文字表示的代数学,用文字代表的代数学在世界上很多地区都存在了几百年之久,尤其是西欧,15 世纪之前的代数学差不多都是用文字表示的,这个时期,问题的解法也都用文字来叙述,没有简写和符号<sup>[16]</sup>,最早的代数被发现于苏美尔人的薪土片上(约公元前 3000 年),最早的代数语言是古巴比伦人(约公元前 1900 年)在使用苏美尔人的旧教材过程中产生的<sup>[16]</sup>。古巴比伦人常用“us”(长)、“sag”(宽)、“asa”(面积)这些字代表未知量,比如该题“长乘宽得面积 10,问长和宽分别是多少?”但他们所求的未知量并不一定是这些几何量,只是他们用面积来简便地表达两个未知量乘积的一种说法。

古埃及人用“堆”(hau)来表示未知数,意思是未知数量的谷物的堆。在数学著作《兰德纸草书》(约公元前 1650 年)中,已经出现了简单的方程:“有

一堆,加上它的  $\frac{2}{3}$ 、它的  $\frac{1}{2}$  和它的  $\frac{1}{7}$ , 共为 33, 求该量<sup>[17]</sup>”。

在古希腊,毕达哥拉斯学派(公元前 6 世纪)研究了多边形数,该学派晚

期数学家尼可麦丘（约公元 100 年）在《算术引论》中列出<sup>[18]</sup>：

三角形数:1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 ……

正方形数:1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ……

五边形数:1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145 ……

六边形数:1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190 ……

七边形数:1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235 ……

虽然他们可以非常轻松地说出具体某一个多边形数，但是他们却无法说出“任一三角形数”、“任一正方形数”，更不能表达“任意多边形数”。原因就在于他们的研究是在确定的数的范围内，他们不会用字母表示数<sup>[17]</sup>。

### 2.2.2 缩略代数阶段

第二个阶段对应的代数学，是用快速记忆方式的简写表示常见的量、运算和关系。丢番图（Diophantus）对代数所做的贡献就体现在这一时期。在他的《算术》一书中，我们就可以看到表示成指数、未知数直到六次幂的相等、相减和倒数的简写符号，特别是他用特殊的符号“ $\xi$ ”表示未知数用于计算，才使得后来的人相信可以用特殊符号表示数字，虽然有越来越多的数学家开始使用不同的字母表示不相同的量，但此时的字母总是表示未知量，而没有出现表示“一类量”或“一般量”，也因此成为“缩略代数”。

在丢番图的《算术》第 1 卷第 1 题：“已知两数的和与差，求这两个数。”他的解法是：“假设和为 100，差为 40，较小数为  $x$ ，则较大数为  $40+x$ ，则  $2x+40=100$ ，故得  $x=30$ ，而较大数为  $70$ <sup>[19]</sup>。”依照现在的代数水平我们可以列出这样的式子， $x+y=a, x-y=b$ 。丢番图虽然使用了字母表示未知数，但是他还不知道用字母表示任意一个数，所以他只能假设两个特殊的值为和与差，解出一种特殊的答案，无法得出一般的解。因此，丢番图解方程是一题一法，有人说：“即便你看懂了他解 100 个方程的方法，但还是不知道怎样解第 101 个方程。”

### 2.2.3 符号代数阶段

最后一个阶段，也就是用符号表示的代数，从第二阶段向第三阶段的转变是非常快的，其中采用的各种符号与其所表示的内容和思想几乎没什么显然的联系。第三阶段的代数学发展滤去了用实际的语言表述带来的差别和数学关系的实际情景，从而引导人们从一般意义上关注数量中的共性，寻求一类问题的统一解法，把人类的认识和思维提升到了一个更高的水平，呈现了代数的本质，在这一

时期最伟大的代表人物是韦达(Vieta's Theorem)，他采用辅音字母表示已知量，元音字母表示未知量，并且规定了算术和代数的分界，他认为代数运算是施行于事物的类或形式，因此把符号代数称为“类的算术”借以区分旧的“数的算术”，使代数学成为研究一般类型形式和方程的科<sup>[20]</sup>，也因此被称为“现代代数学之父”。

2.3 “用字母表示数” 教学研究

2.3.1 国内“用字母表示数” 教学研究

笔者在中国知网上以“用字母表示数”为关键词搜索相关期刊，共有 48 条结果，将与该研究无关的期刊进行剔除，可将剩余期刊分为如下几类：

表2-4 国内期刊“用字母表示数” 文章分类情况

| 编号 | 文章类别               | 篇数 |
|----|--------------------|----|
| 1  | 教育取向的“用字母表示数”的历史   | 2  |
| 2  | 教学设计               | 10 |
| 3  | 课堂实录与反思            | 5  |
| 4  | 学生对“用字母表示数”的认知水平评价 | 1  |
| 5  | 新理念下课例探析           | 9  |
| 6  | 其它                 | 5  |

近些年，也不乏一些学者开始研究数学史在数学教学中的作用，并进行了相关教学设计。蔡宏圣利用数学史的重构式进行了教学设计<sup>[21]</sup>；陈静安、黄启亮等对中学生“用字母表示数”认知发展的相似性进行了研究，学生对“用字母表示数”的认知发展过程与“字母表示数”意义演进的历史发展过程存在显著的相似性<sup>[3]</sup>。

随着培养学生数学核心素养的大力倡导，孙兴华开发了“用字母表示数”课例，体现了“三教”理念下的数学教学的追求与特质<sup>[23]</sup>；陶红强结合“用字母表示数”这一课，从知识、思维和思想三个层面论述了如何促进学生的发展<sup>[24]</sup>。陶小妹运用情境教学法让学生学会“用字母表示数”，实现由日常语言表示数量关系到用符号语言表示数量关系以及由数字表示数到字母表示数的认知跨越<sup>[25]</sup>；徐艳从如何找对学习起点、领悟数学本质、转变数学思维、提升数学认识四个方面进行了教学设计<sup>[26]</sup>；鞠文玲设计一系列启发学生思考的综合性、探究性的数学研究活动，引领孩子开展自主探索、合作交流、共同分享等活动，让孩子经历“用

字母表示数”这样一个完整的探索与创造过程,让“亲身体验与创造分享”成为数学教学的生命线<sup>[27]</sup>。

教师也越来越重视学生对数学模型的建构,吴梅香、徐斌利用玩扑克牌进行了课堂教学以激活学生数学模型建构的情趣<sup>[28]</sup>;万兆荣以苏教版《“用字母表示数”》一课教学为例,展示了学生建模过程以及如何有效引导学生建立符号意识<sup>[29]</sup>。付秋萍、刘洪斌也强调了在代数模型建构中培养学生符号意识<sup>[30]</sup>;钱燕飞、郑大明巧用生活素材展现数学模型的能动建构,利用新课程标准教材中的一个比较典型的代数常识的教学,展示引导学生主动构建数学模型的基本策略<sup>[31]</sup>;闫炳霞介绍了符号、符号思想、符号感和学生符号感的培养几个概念和“字母表示数”的内涵,主要是以“字母表示数”为载体来说明怎样培养学生的符号感<sup>[32]</sup>。

除了以上期刊,笔者还查询了与“用字母表示数”相关的硕博士论文。吴雅萍将变构学习模型运用于“用字母表示数”的教学设计之中,在了解学生的基础上撰写案例式教学设计<sup>[33]</sup>;杨朝龙为了促进学生更好的学习代数,对七年级学生“用字母表示数”的意识进行了调查和研究<sup>[34]</sup>;关于对初中生“用字母表示数”的认知水平的研究,相关的论文有刘晓艺对5-7年级学生“用字母表示数”的理解水平进行了调查研究<sup>[35]</sup>;张莎莎进行了七年级用“字母表示数”的有效教学探究<sup>[36]</sup>;谢煜坤调查了初中生对字母表示数的理解<sup>[37]</sup>;冯妙对彝、藏、汉族初中生字母表示数认知水平进行了比较研究<sup>[38]</sup>,都发现了学生在理解上的问题,并都提出了相关的教学改进措施,但很少用到数学史。

### 2.3.2 国外“用字母表示数”的教学研究

早在1975年,Collis就调查研究了学生是如何理解“用字母表示数”的,并很大程度上细化了这一概念,他从学生的角度将字母符号分成了六种不同的层次<sup>[39]</sup>。在Collis研究的基础上,Küchemann得到了中学数学中字母使用的六个水平:要估值的字母、被忽略的字母、作为对象的字母、作为具体未知数的字母、作为一类数的字母、字母作为变量,并对中学生对“用字母表示数”的理解做了进一步研究,结果显示:13到14岁的学生在理解水平上有很大的飞跃,而14到15岁的孩子却没有显著的进步<sup>[40]</sup>。Ursini和Trigueros提出了3UV模型<sup>[41]</sup>,可以在工具设计时作为指引,设计教学活动并分析教科书及其他初等代数的数学教材中有关字母表示数的概念,他们认为要了解字母表示数用途的所有方面就需要掌握字母表示数的每一种用法在不同抽象水平中的运用,根据在教学和学习中关于变量概念的几年研究成果,最终认为在初等代数中对字母表示数的理解可以被描述为:用文字符号进行简单的计算和操作、理解为什么这样操作、对使用字母

后果的预见、区分不同字母表示数的用途、区分不同字母表示数的用途、以灵活的方式在字母表示数的不同用途之间转换、对相同的数学问题中字母表示数的不同用法进行整合<sup>[41]</sup>。从本质上讲,该模型由字母表示数用法的不同方面的详细描述组成,强调了字母表示数的三个主要用途在初等代数中的基本理解<sup>[37]</sup>。

## 2.4 数学史融入数学教育研究

### 2.4.1 国内数学史融入数学教育的研究

关于数学史融入数学教育的研究我们国家起步虽然比国外晚,但所做的研究非常多,在知网中输入“数学史融入数学教育的研究”有238条搜索结果,主要有:

1.数学史融入数学课堂的行动研究。关于该研究华东师范大学的硕博士生在汪晓勤等老师的指导下发表了大量的文章。如王芳的《数学史融入导数教学的行动研究》<sup>[42]</sup>、李玲的《数学史融入数列教学的行动研究》<sup>[13]</sup>、田方琳的《数学史融入对数概念教学的行动研究》<sup>[43]</sup>、钟萍的《数学史融入高中代数概念教学的行动研究——以“函数”、“对数”为例》<sup>[44]</sup>、沈中宇的《数学史融入立体几何教学的行动研究——以直线、平面为例》<sup>[45]</sup>等。

2.研究数学史融入数学教育对教师专业发展的影响。如蒲淑萍的《HPM与数学教师专业发展——以一个数学教育工作室为例》<sup>[46]</sup>文章中研究结果显示参与HPM研究的教师HPM教学设计的能力、沟通交流及合作能力、教学科研能力均得到一定程度的提高。

3.研究数学史融入数学教育对学生的影响。如田方琳的文章《数学史融入对数概念教学的行动研究》<sup>[43]</sup>中着重研究了数学史融入对数概念的教学对学生三维目标的影响。

4.研究数学史在具体数学知识学习中的融入情况。如翟阳琴的《将数学史融入高中数学课堂——以“等差数列的前n项和(1)”为例》<sup>[47]</sup>、孙雨琴的《用叠加模式将数学史融入数学教学——以“导数的几何意义”为例》<sup>[48]</sup>、洪燕君等的《数学史融入“加减消元法”的课堂教学》<sup>[49]</sup>、高一刚的《数学史“重构式”融入小学数学教学的研究——以“认识厘米”为例》<sup>[50]</sup>、杨懿荔的《HPM视角下解析几何的教学——以直线方程、曲线与方程为例》<sup>[51]</sup>、杨鑫的《数学史在高中概率统计教学中的应用探究》<sup>[52]</sup>等。

### 2.4.2 国外数学史融入数学教育研究

国外对数学史的研究在上个世纪就已经开始了,数学史最早进入的是数学教育的研究领域。在1972年,专门的国际研究组织——数学史与数学教育关系国际研究小组成立了,这标志着数学史成为了数学教育研究的重要部分。查阅国外已有的HPM研究文献,发现数学文化通常以历史故事、艺术、数学、人文及信仰中的数学和它们所内含的数学思想、日常文化、现实世界的情景、学生的经验等为主要切入点融入数学教学过程。英国在2000年执行的《课程标准》就作出了“使用可以展现社会和文化多样性的材料”的要求;在俄罗斯教育家彼捷尔松主编的小学三年级教材中,本土文化与数学文化融合的情形就已经十分明显;Arnason K等专家关于“文化境脉中的数学”的研究项目将日常文化和真实世界等数学文化融入数学教育中<sup>[54]</sup>。

国外对数学史融入数学教育的研究主要有以下几个方面<sup>[53]</sup>:

1.关于数学史融入数学教育理论基础的研究。如Fauvel在1991年总结出了数学史融入数学教育的五十五个理论依据<sup>[55]</sup>;Guliker与Blom在2001年给出了数学史融入数学教育的三类观点,即概念性观点、多元文化观点和动机观点。

2.研究数学史融入数学教育对学生和教师的影响。如Ranson、Mcbrid和Rollin通过对数学态度的前测和后测,发现融入数学史的课堂能够有效提高提高学生学习数学的积极性。Tzannaki和Arcavi总结了数学史融入数学教育能够促进教师教学的五个原因<sup>[56]</sup>。

3.可以为中学数学课堂提供数学史素材的研究。如美国在1969年组织数学史家和数学教育家编写了《用于数学课堂的历史话题》。

4.利用数学史知识提高教师数学素养的研究。如Cooney在1999年和Skott在2001年做了相关研究。

5.研究数学史融入数学教育的方法和途径。如福威尔在《数学学习》上发表“教学中如何应用数学史”的专题,列举了运用数学史的12种不同做法。

## 2.5 文献综述小结

本章主要从“用字母表示数”发明的历史、国内外关于“用字母表示数”的教学研究、HPM融入数学教育几个角度进行了文献的搜集与整理。

“用字母表示数”的发展经历了“文辞代数”、“缩略代数”、“符号代数”三个阶段,每个阶段都有其独特的特征,可以充分反映在“用字母表示数”的发展过程中古人所遇到的困难和每个时期发展的局限性,经过花拉子米、丢番图、韦达等数学家的努力,“用字母表示数”一步步完善,并且广为传播。虽然国内



外也不乏融入数学史的“用字母表示数”的教学设计，并且部分也已经取得了比较好的效果，但这些研究中重构历史的非常少，更多的是对史料的简单重组，也没有系统地对课堂、教师及学生进行分析，其价值的真实性有待进一步研究。因此，开发融入数学史的“用字母表示数”的教学课例并系统比较分析是有必要的。HPM 教学设计与实践研究越来越受到人们关注，但数学史的应用方式还是比较单一，最复杂的重构式很少被应用。

## 第3章 研究设计

### 3.1 研究方法

针对本研究的特点主要采用行动研究的研究方法，数据收集的方法有问卷法、访谈法等。

行动研究即研究者参与到教学设计与实施中去，但研究者不一定是执教者。Burns（2000）总结了行动研究的四个基本特征：合作性、和特定情景相联系、参与性、自我评价性。

“制定计划”指阅读文献、确定课题、制定研究计划、编制教学设计、问卷、访谈提纲，在制定计划时，要使得制定的计划能够达到预期目标。“实施计划”指课堂实践，将计划在课堂中实践是开展行动研究的核心步骤。“统计数据”是指把研究中收集到的相关数据进行统计、分析和反馈。“评价反思”是数据处理后对结果进行评价并进行反思改进。

行动研究的运用范围非常广泛，在国外，行动研究可以运用在组织研究、教育研究、酒店管理的研究、医务护理方面的研究以及信息技术开发上的研究和行为研究等领域。在国内，行动研究主要应用在教育这一领域<sup>[57]</sup>。对于行动研究的意义就在于可以改进教学、提升教学质量和促进教师的专业发展。通过行动研究，教师可以获得比较具体的关于如何改进教学活动的知识和经验，以更好的促进学生发展。

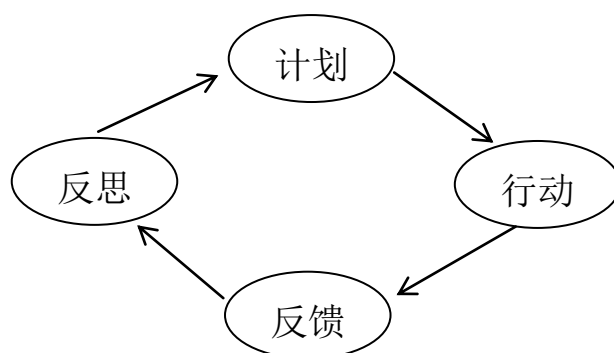


图 3-1 行动研究步骤

### 3.2 研究对象

研究对象是上海市某中学七年级三个班的学生，该中学是一所公办学校，生

源主要是学校附近居民的子女，还有一部分来自学校教师和周围企业员工的子女。在第一轮研究中，笔者将实习期间带教师父所教的两个班级的其中一个作为本文的研究对象，记作 G1；将教师 L 任教的两个七年级班级中的一个作为对照班级，记作 C1。在第二轮研究中，将师父任教的另一个班级作为实验班，记作 G2，与第一轮实验班 G1 进行对照，这三个班级都是该学校的平行班级，学生的数学学习能力类似。

数据分析表（第一轮）：

| 类别  | 编号 | 人数 |
|-----|----|----|
| 实验组 | G1 | 45 |
| 对照组 | C1 | 45 |

数据分析表（第二轮）：

| 类别  | 编号 | 人数 |
|-----|----|----|
| 实验组 | G2 | 43 |
| 对照组 | G1 | 45 |

### 3.3 研究工具

#### 3.3.1 调查问卷

本文的研究工具主要是调查问卷、访谈和课堂实录。问卷第一部分的一、二、三、四题是情感态度类题目主要参考的是李玲的硕士论文<sup>[13]</sup>，其中第一、二、三题考察的是学生对数学史的看法和了解程度。由于研究中所选班级的学生情况类似，所以前 3 个问题只有第一轮研究的实验班同学做，其余题目参与本次研究的所有学生都做。问卷第二部分是与本课时知识有关的数学题目，主要参考的是谢煜坤硕士论文<sup>[37]</sup>，笔者也结合所调查学生的实际情况进行了适当修改。设计问卷的目的主要有两个：一是为了了解学生对数学史的态度；二是为了调查采用数学史融入的教学设计是否有助于学生理解“用字母表示数”。

问题一的设计目的是想了解学生对数学史是否感兴趣。

问题二的设计目的是为了了解学生对数学史的了解情况。

问题三的设计目的是考察学生对数学史融入教学设计进行课堂教学的认可程度。

问题四的设计目的是了解学生对“用字母表示数”的看法。

问题五的设计目的是统计学生对字母表示任意数的理解情况。

问题六的设计目的是为了了解数学史对学生理解拓展题是否有帮助。

问题七和问题八的设计目的是为了了解学生的知识应用情况。

### 3.3.2 访谈提纲

访谈均为课后访谈，内容分为对学生的访谈和对教师的访谈。对学生的访谈在第二轮教学设计课堂实施后进行，主要目的是为了了解学生对数学史融入课堂教学的态度和感受以及学生对“用字母表示数”的理解情况；对教师进行了两次访谈，分别在每轮的教学设计课堂实施后开展，目的是为了了解教师对数学史融入课堂教学的态度以及得到教师对数学史融入“用字母表示数”教学设计的改进建议。

学生访谈主要问题设计：

问题一的设计目的是为了了解学生对数学史融入“用字母表示数”课堂教学的感受。

问题二的设计目的是为了了解学生对数学史融入“用字母表示数”课堂教学的态度。

问题三的设计目的是为了了解学生是否理解用字母表示任意数。

第一轮教师访谈主要问题设计：

问题一的设计目的是为了了解教师对数学史融入“用字母表示数”教学的感受。

问题二的设计目的是为了得到第一轮研究教学设计的改进建议。

第二轮教师访谈主要问题设计：

问题一的设计目的是为了了解教师对改进后的教学设计进行课堂教学的感受。

问题二的设计目的是为了了解数学史融入“用字母表示数”进行课堂教学对教师教学的影响。

## 第 4 章 研究过程

2018 年 9 月，笔者在上海市某中学进行了“用字目表示数”的课堂教学。在这期间，作者通过查找数学史料结合“用字母表示数”的课程教学实际和学生学情编写了教学设计。主要从以下四个环节进行教学设计：

- (1) 情境引入
- (2) 新知探究
- (3) 课堂小结
- (4) 巩固练习

由于实习学校教学任务比较重，该课题只进行了两轮，第一轮研究中，笔者将实习学校带教师父的两个班级的其中一个作为实验班，同事任教的一个班级作为对照班，实验班级采用的是笔者设计的数学史融入课堂教学的教学设计，对照班级使用的是没有数学史融入的教学设计，教学实施后分别对部分学生和听课的专家教师进行了访谈，对实验班和对照班的全体学生进行了问卷调查，针对各位教师的意见以及对问卷调查结果的反馈分析，将第一轮教学设计进行了修改，修改后的教学设计用于第二轮研究中实验班的教学，第二轮的实验班是带教师父任教的另一个班级 G2，对照班是第一轮的实验班 G1。第二轮教学设计课堂实施后对学生的问卷、访谈以及对教师的访谈进行了反馈总结并且进一步得到一些改进的方法。理想的状况的是在第二年把第二轮改进后的课例能够再次进行教学实践和检验，笔者今后还会继续研究和反思，也会将改进后的设计在其他感兴趣的老师班上实践。

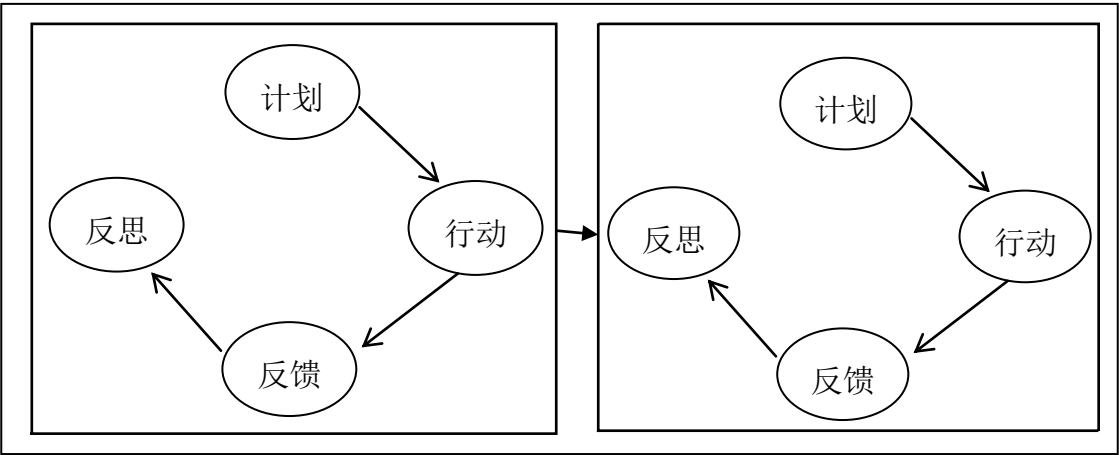


图 4-1 行动研究步骤

## 4.1 数学史融入“用字母表示数”教学设计一

笔者针对“用字母表示数”的史料,结合新课程标准以及指导教师、专家的建议进行了第一轮教学设计,教学设计课堂实施之后根据问卷调查、教师访谈、课堂实录得到了一些反馈信息和教学设计改进建议,用于指导第二轮教学设计。

### 4.1.1 教学设计背景

“用字母表示数”在历史上经历了漫长的发展时期,具有重要意义的阶段主要有三个:“修辞代数”阶段、“缩略代数”阶段、“符号代数”阶段。

“修辞代数”阶段:用文字代表的代数学在世界上很多地区都存在了几百年之久,尤其是西欧,15世纪之前的代数学差不多都是用文字表示的,这个时期,问题的解法也都用文字来叙述,没有简写和符号。例如,大英博物馆所藏古巴比伦时期泥版 BM13901 上其中一题:“将正方形面积与边长相加,和为 $\frac{3}{4}$ ,求边长。”解法如下:“置系数 1,半之,得 $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$  自乘得 $\frac{1}{4}$ ; 将 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 相加得 1; 此为 1 的平方,从 1 中减 $\frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{2}$ ,即为正方形的边长<sup>[19]</sup>。”可以看出,整个过程没有任何的字母表示,这也使得在数列中没有“通项”,所有数列求和只能针对具体的若干项。

“缩略代数”阶段:公元 3 世纪,被誉为古希腊代数学鼻祖的丢番图(Diophantus)在其《算术》中首次用字母“ $\xi$ ”来表示未知数,但丢番图并不知道用字母来表示任一个数,在解题是通常是设特殊值的方法,例如《算术》第一卷第 7 题:“从同一个数中分别减去两个已知数,使两差数之比等于给定比。”丢番图的解法是:“假设这两个已知数分别是 100 和 20,给定比是 3:1,所求数为  $x$ ,则  $x-20=3(x-100)$ ,故得  $x=140$ 。以我们现在的知识看,这样的求解肯定是不完全正确的,每个人取的值不同结果就不同,这与结果的唯一性是不符的,因此也有人取笑这种方法说“用丢番图的方法解方程,解了 100 道之后,还是不知道 101 道该怎么解。”

“符号代数”:16 世纪法国数学家韦达终于实现历史性的突破,他在《分析引论》(1951)中使用字母来表示未知数以及已知数。这样《算术》第一卷第 7 题就可以这样解:“设两个已知数分别为 B 和 D,给定比是 R:S,被减数为 A,则  $(A-B):(A-D)=R:S$ ,故  $RA-RD=SA-SB$ ,故得  $A=\frac{SB-RD}{S-R}$ 。这样,数列里任意一项就可以用“通项”表示出来,每一个字母都只是一个符号,不具有特定的意义,为解题带来了很大的方便<sup>[4]</sup>。

通过“用字母表示数”的历史发展过程,可以看出,一个知识的发展不是一

蹴而就的,是经过一代代的数学家坚持不懈的努力探索出来的,从解题完全用文字叙述的繁琐,对于数列只能说出其中一项,没办法表示数列的“通项”到每个字母只能表示特定的意义,每一道题只能用不同的字母表示,再到最后字母可以表示一类数的伟大发现经历了几个世纪。“用字母表示数”的历史发展经历了如此曲折漫长的过程,那如今的学生在学习时会遇到哪些困难呢?在每个发展阶段他们的想法会和数学家们一样吗?如果和历史具有相似性,教师在教学中又该如何借助史料帮助学生理解?这些问题萦绕在笔者的心头,笔者在《数学教育学报》上看到了汪晓勤和蒲淑萍两位老师发表的《学生对字母的理解:历史相似性研究》的文章,文章里通过测试卷对六年级学生对“用字母表示数”的理解进行了测试,测试结果发现:大部分学生对“用字母表示数”的理解停留在“修辞代数”阶段和“缩略代数”阶段,对字母意义的认知水平多数停留在“记数符号”及“未知量”的层次,只有少部分学生理解并能用“一类量”思想解决问题;学生对于符号代数的“一类量”思想存在认知困难;学生对“用字母表示数”的认知发展过程和“字母表示数”意义演进的历史发展过程之间存在一定的相似性<sup>[4]</sup>。文章中针对调查结果也提出了相关建议:可以借鉴字母意义的历史演进过程设计教学,将史料及其蕴含的思想、方法等重构后应用于课堂教学,将能够有效解决学生学习过程中存在的问题与障碍。

#### 4.1.2 教学设计意图

“字母表示数”是沪教版七年级上册第1课时的内容,作为教材的开始章节和学生学习符号语言的开端,这一教学内容显得尤为重要。相关研究表明,一定程度上,学生在学习“用字母表示数”的各个阶段所遇到的困难和代数的发展过程具有历史相似性<sup>[4]</sup>。

因此,笔者基于历史相似性,设计了“字母表示数”的教学过程,以期达成以下3个教学目标:

(1) 知识与技能:理解“用字母表示数”的意义,会用字母表示简单的数量关系与规律,渗透符号化数学思想,培养符号感。

(2) 过程与方法:让学生经历自主探索、合作交流的过程,提高分析、解决问题的能力,培养应用数学的意识,以及学生抽象概括的能力。

(4) 情感与态度:创设各种情境,增强学生学习的兴趣,培养学生良好的意志品质,进一步提高创新和实践能力。

本节课的教学重点:理解“用字母表示数”的意义,会用含有字母的式子表示数量,表示数量之间的关系。



教学难点：理解“用字母表示数”的意义。

为了达到以上教学目标，对教学内容的设计意图如下：

情境引入：学生小学五年级已经对“用字母表示数”有初步学习，对旧知的回忆可以启发学生对新知的思考，从学生熟悉的小动物引入，学生可以在游戏中体会“用字母表示数”给生活带来的便利，感受数学来源于生活又为生活服务。

新知探究：在出现字母表示数之前，人们都是用文字叙述解题的，所以在学生刚接触“用字母表示数”这一知识时，对于题目学生首先也会选择算术的方法（不含字母），所以教学也应该重视学生的认知起点，笔者首先设计一道题目中不含字母的应用题，这道题目用代数方法和设未知数的方法都可以求解，尊重学生的选择，帮助学生的认知实现由修辞代数到缩略代数的过渡；接着，笔者设计一道圆的周长用字母“ $r$ ”表示，求圆的面积的题目，学生以前接触的题目中，字母“ $r$ ”都表示圆的半径，所以在学生的认知中圆的半径只能用字母“ $r$ ”表示，在修辞代数之后的很长一段时间，丢番图首次用字母表示未知数，但是每个字母都有特定的意义，这种认识虽然有很大的局限性，但也是字母表示数认识发展的一个重要阶段，应该让学生自己去发现这种认识的不足，而不应该直接告诉学生每个字母不是只能表示特定的意义。这道题目和学生的固有认知产生冲突，带领学生认识字母并不是只能表示特定的意义；最后，为了让学生对字母表示数有一个整体认识，从一道经典例题：“已知两个数的和与差，求这两个数。”进行教学。

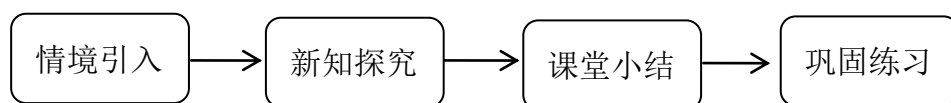
遵循“用字母表示数”发生发展的历史过程，帮助学生深度理解“用字母表示数”的意义，这一探究过程属于隐性融入数学史知识（顺应式和重构式），既不需要追加额外的教学时间，影响教学效率，又能给予学生常规练习所无法替代的教学效果。

巩固练习：字母和字母相乘、数字和字母相乘，乘号可以省略不写或者用“ $\bullet$ ”代替，传统教学中，教师只是告诉学生可以这样表示，学生也就死记硬背，但学生的心理关于为什么可以这样表示还是有很多疑惑的，这种规定也有相应的数学史，设计该类型的题目，适时插入相应的数学史可以帮助学生理解这一规定解除心中的疑惑。

课堂小结：学生经历了一节课 40 分钟的探究学习，对前面所学的内容可能已经有所忘记，有些同学课堂中间还可能出现注意力不集中的情况，课堂小结就可以有效的帮助学生理清思路，系统回顾本节内容。

### 4.1.3 教学设计内容

本课时的教学由四个环节构成：



第一环节：情境引入

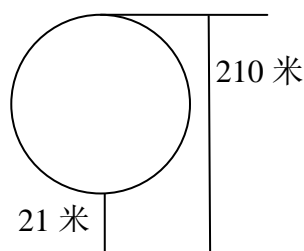
今天我们一起做一个小游戏，游戏规则：第一个同学说“一只小猪 4 条腿，两只小猪几条腿？”，第二个同学接着说“两只小猪 8 条腿，三只小猪几条腿？”，第三个，第四个就这样接着说，跟不上节奏的淘汰出局。

设计意图：游戏可以引起学生的学习兴趣，提高学生的探究积极性，这个游戏如果学生不出错可以一直继续下去没有终点，教师可以发问“如何对这个游戏进行概括？”因为学生小学已经学习过“用字母表示数”的基本知识，所以能够回答“用字母表示数”，从而引出课题。

第二环节：新知探究

用两种方法求解下面问题：（ppt 出示例 1）

例 1：有“亚洲第一”之称的长沙摩天轮于 2004 年 9 月 30 日建成，当你 10 月 1 日对外开放，是亚洲第一、世界第二的摩天轮。长沙摩天轮最令人称奇之处在于它立在巨型屋顶上，据专家介绍，将摩天轮建在屋顶上在世界上都是独一无二的。如果摩天轮垂直于地面时，最高点离地面 120 米，最低点离地面 21 米，那么这个巨型摩天轮的半径是多少？



$$\begin{aligned}
 \text{算术方法: } & (120 - 21) \div 2 \\
 & = 99 \div 2 \\
 & = 49.5(\text{米})
 \end{aligned}$$

方程方法：

解：设这个巨型摩天轮的半径是  $x$  ( $r$ )，由题意知：

$$\begin{aligned}
 2x(r) &= 120 - 21 \\
 2x(r) &= 99 \\
 x(r) &= 49.5
 \end{aligned}$$

设计意图：该题从学生喜欢的游乐项目入手设置问题，带领学生体会生活中处处充满数学；虽然学生经过初步学习已接触过“符号代数”的思想，在教学要求上进入了“缩略代数”的阶段，但他们还是喜欢用“修辞代数”解决问题，说明这种形式和水平的思维方式更接近人们的认知本源，此处体现出较强的历史相似性。但还是会有个别学生使用方程的方法，这就为把学生的思维引向代数发展的第二个阶段做好铺垫。

例 2: 已知圆的周长为  $r$ , 求圆的面积。(ppt 展示)

解: 圆的面积为:  $(r \div 2 \div \pi)^2$

学生看到题目后, 很有可能立马提出质疑“老师, 你是不是写错了, 字母‘ $r$ ’代表的是半径, 你写的周长是  $r$ 。”教师此时给予回应: “你的反应非常快, 立马就想到了我们以前都是用字母‘ $r$ ’表示圆的半径, 我们伟大的数学家丢番图当时也认为每个字母只能表示特定的意思, 比如字母‘ $r$ ’只能表示圆的半径, 这样对于不同的题用到的字母就不一样, 大家觉得这种方法好吗? 小组之间讨论一下这种方法的利弊, 等会请同学分享他的看法。”

经过小组讨论, 程度好的同学就会发现字母只是一个符号, 没有特定的意义, 可以表示不同的意思。

当学生讨论出字母只是一个表示符号, 不具有特定意义的相似结论后, 教师给予点评: “历史上数学家们在解题时也发现了用丢番图方法解题的弊端, 经过数学家们坚持不懈的努力, 终于在 16 世纪, 法国数学家韦达探索出字母只是一个符号, 不应该有特定的意义, 这样字母就可以表示一类数了, 而不是特定的未知数, 所以我们这道题目是没有问题的。”

设计意图: 带领学生经历“用字母表示数”的历史发展过程, 让学生感受他们的想法和历史上数学家的想法相似, 领悟我们现在使用的每一个数学结论都是经过数学家一步步探索出来的, 可以提高学生的学习自信心, 培养学生遇到问题不怕出错, 善于思考的品质, 通过学生对字母“ $r$ ”表示圆周长产生认知冲突, 为字母表示任意数的过渡奠定基础。

例 3: 运动会期间, 学校买了 26 个篮球, 每个篮球  $r$  元; 买了  $z$  个足球, 每个足球 32 元, 代数式  $26r + 32z$  代表什么意思? (ppt 出示)

解: 代数式  $26r + 32z$  代表 26 个篮球和  $z$  个足球的总价。

设计意图: 该题中的字母均表示已知数, 但字母表示不同的含义, 加深学生对字母表示任意数的理解。

例 4: 已知两个数的和与差, 求这两个数。(ppt 展示)

解: 设这两个数分别为  $x$  和  $y$ , 两个数的和为  $a$ , 两个数的差为  $b$ 。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \\ \text{解得} & \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

设计意图: 教学是一个循序渐进的过程, 例 4 是对学生的拓展提升, 既可以检验学生对字母表示数的理解情况, 又可以根据学生对字母表示数理解程度的不

同,带学生重新回顾“用字母表示数”的发展过程。既然学生的认知和知识的发生发展过程具有历史相似性,利用顺应式和重构式将数学史的融入教学既没有因为融入数学史知识而影响课程进度,又能够帮助学生更好的理解“用字母表示数”的各种意义,同时又能够培养学生对数学史的兴趣,提高学生的探究兴趣。

### 第三环节:巩固练习

练习1:设某数为 $x$  ( $x \neq 0$ ),用 $x$ 表示下列各数。

- (1) 比某数的一半多2的数。
- (2) 某数减去5的差与10的积。
- (3) 某数与12的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的4倍除以某数的商。

解:练习1: (1)  $\frac{1}{2}x+2$   
(2)  $10(x-5)$   
(3)  $(x+12) \div x$   
(4) 4

分析:练习题既可以帮助学生巩固新知,也可以为接下来学生学习代数式奠定基础。学生在解练习1时会出现将数字和字母 $x$ 之间用“ $\times$ ”连接的现象,这时可以插入一段关于“ $\times$ ”在乘法算式里的小故事:“德国数学家莱布尼茨认为乘号“ $\times$ ”容易与字母“ $x$ ”相混淆,建议用“ $\bullet$ ”表示乘号;如果有数,数要写在字母的前面。这样,用“ $\bullet$ ”标志乘号得到了广泛的承认。如今,欧洲大陆派(德、法等国)规定以“ $\bullet$ ”作乘号。其他国家则以“ $\times$ ”作乘号,“ $\bullet$ ”为小数点。而我国则规定以“ $\times$ ”或“ $\bullet$ ”作乘号都可,一般用于字母或括号前的乘号可略去<sup>[19]</sup>。”

学生很多时候都知道在乘法算式里“ $\times$ ”可以省略,但问其为什么可以省略都说不出来,插入这一段小历史可以帮助学生较好的理解为什么在乘法算式里“ $\times$ ”可以省略,同时感悟数学的科学严谨,体会每一种规定都是有它的历史原因的。

### 第四环节:课堂小结

带领学生回顾总结“用字母表示数”的发展历史以及“用字母表示数”的意义。

分析:课堂小结是非常有必要的,可以帮助学生理清思路,对课堂内容有一个清晰的认识,一定程度上也可以把上课思想偶尔“开小差”的同学缺失的重要知识点补救上。

4.2 反馈分析

4.2.1 学生问卷反馈分析

第一题：你对课上介绍的数学史知识感兴趣吗？

A.非常感兴趣    B.感兴趣    C.一般般    D.不感兴趣    E.完全不感兴趣

G1 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D | E |
|----|----|----|---|---|---|
| 人数 | 22 | 14 | 8 | 1 | 0 |

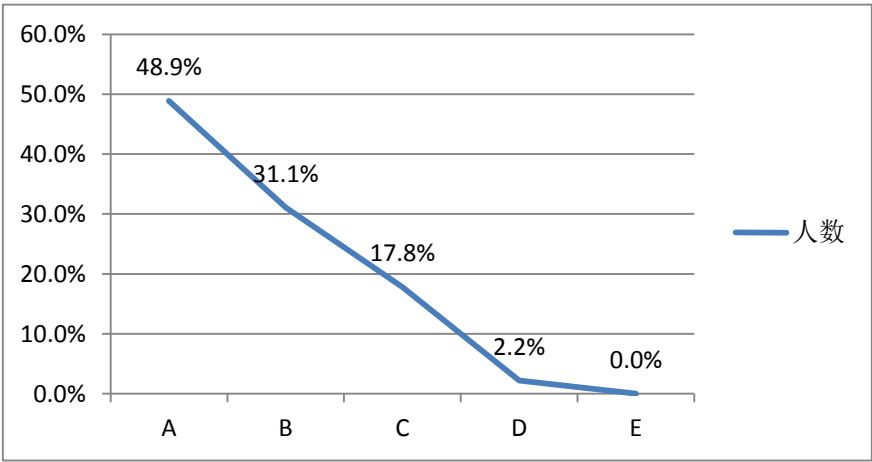


图 4-2 问题 1 数据统计比例图

调查结果显示，分别有 48.9%和 31.1%的学生对数学史知识非常感兴趣和感兴趣，也有 17.8%的学生表示感觉一般般，没有人表示完全不感兴趣，但有 1 个学生表示不感兴趣。总的来说，该班级的学生大部分对数学史的兴趣是比较浓厚的，接近一半的学生对数学史是非常渴望的。兴趣是最好的老师，有了这一数据的支撑，教师在平时的备课中，就可以多查阅与新授知识有关的数学史知识，激发学生的数学学习兴趣，提高课堂效率。

第二题：你以前对数学史知识了解的多吗？

A.非常了解    B.了解    C.一般般    D.不太了解    D.完全不了解

| 选项 | A | B  | C  | D | E |
|----|---|----|----|---|---|
| 人数 | 9 | 13 | 13 | 7 | 3 |

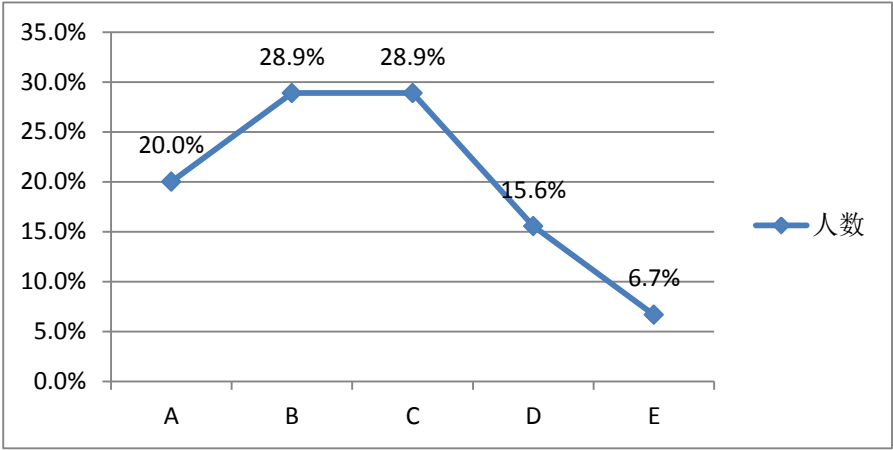


图 4-3 问题 2 数据统计比例图

可以看出，对数学史知识了解的和一般般的人数相同占全班人数的 28.9%，认为自己非常了解的只有 20.0%，了解和非常了解加起来还没有 50%，说明学生整体对数学史的认识偏低，了解的很少。在学生的眼中，数学史可能只是一个数学小故事，有 15.6% 的学生认为自己不太了解，还有 3 个学生认为自己完全不了解。从以上数据也可以说明，教师和学生对数学史不重视，还没有意识到数学史在帮助学生理解上的作用，希望通过本研究可以使周围的学生和教师感受到数学史的作用，引起大家对数学史的重视。

第三题：在数学课堂中融入数学史的教学方式你认可吗？

|         |       |        |        |          |   |
|---------|-------|--------|--------|----------|---|
| A. 非常认可 | B. 认可 | C. 不讨厌 | D. 不认可 | E. 完全不认可 |   |
| 选项      | A     | B      | C      | D        | E |
| 人数      | 23    | 13     | 8      | 1        | 0 |

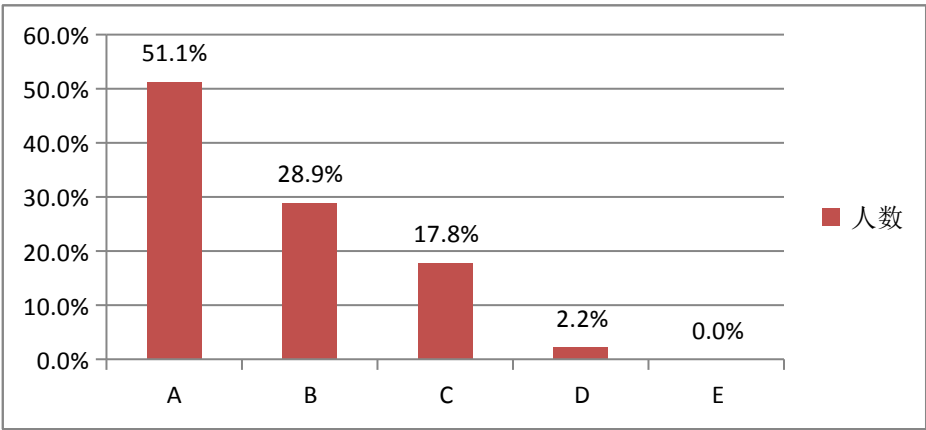


图 4-4 问题 3 数据统计比例图

从比例来看，有 51.1% 的学生表示非常认可，28.9% 的同学表示认可，还有 17.8% 的学生表示不讨厌，没有人表示完全不认可，但有 1 个同学表示不认可，

而且这个学生和问题1表示不感兴趣的竟然是同一个学生。总体来讲,数学史融入数学课堂教学受到学生的高度欢迎和喜欢。利用顺应式和重构式将数学史融入课堂教学,可以使学生切身体会知识的发生发展过程,根据历史相似性原理,学生肯定会与数学家在遇到该问题时有着相似的困惑和发现,借机插入相应的历史知识可以引起学生的自豪感和成就感,引发他们的探究欲望,逐渐提高学习数学的自信心。

第四题:学完这节课,你认为“用字母表示数”在生活中有用吗?

A. 非常有用      B. 有用      C. 没有用      D. 不清楚

G1 实验班统计数据:

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 22 | 20 | 0 | 3 |

C1 对照班统计数据:

| 选项 | A | B  | C | D  |
|----|---|----|---|----|
| 人数 | 9 | 16 | 3 | 17 |

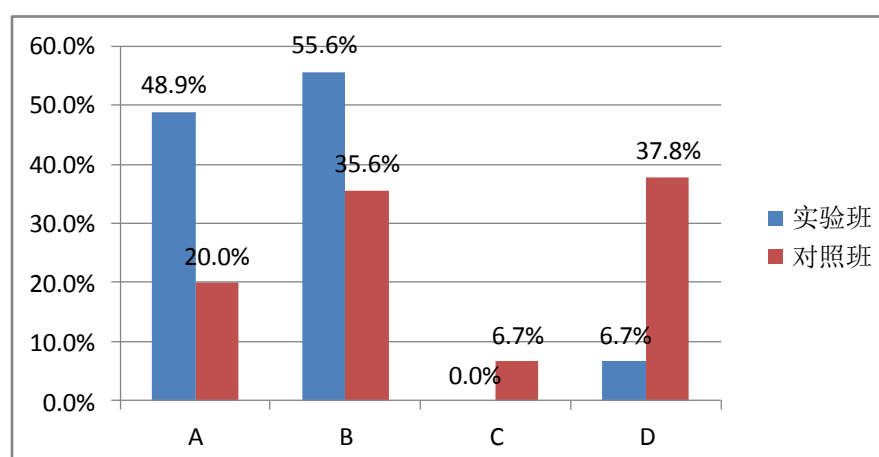


图 4-5 问题 4 数据统计比例图

从以上数据可以看出,实验班有 48.9%的同学认为“用字母表示数”在生活中非常有用,而对照班只有 20%;虽然在两个班级中对“用字母表示数”作用不清楚比例,实验班要比对照班少 31.7%,但实验班仍然有 6.7%的同学对“用字母表示数”的作用不清楚,这些同学对“用字母表示数”每个阶段意义理解的不够深入,学生在每个阶段出现的与数学家相似的情况,教师都给予了历史相似性的总结,学生没有体会到其作用的原因还有待调查;值得高兴的是,在实验班没有人认为“用字母表示数”在生活中没有用,而对照班却有 6.7%的同学认为没有用,说明数学史融入课堂进行教学可以培养学生知识联系生活的意识。

第五题:通过这节课的学习,你理解用字母可以表示任意了吗?

A. 非常理解      B. 理解      C. 有点模糊      D. 不理解

G1 实验班统计数据:

|    |    |    |   |   |
|----|----|----|---|---|
| 选项 | A  | B  | C | D |
| 人数 | 13 | 25 | 5 | 2 |

C1 对照班统计数据:

|    |   |    |    |   |
|----|---|----|----|---|
| 选项 | A | B  | C  | D |
| 人数 | 9 | 19 | 11 | 6 |

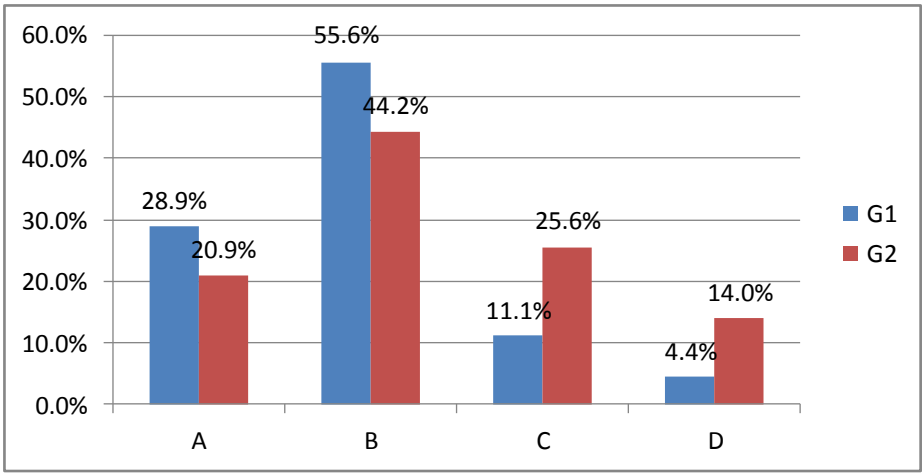


图 4-6 问题 5 数据统计比例图

字母表示任意数是“用字母表示数”教学的重点也是学生理解的难点，学生达到非常理解的程度是有一定困难的，从数据来看，实验班有 28.9%的学生认为自己非常理解相比对照班高出了 8.9%，能够理解是教学应该达到的最低要求，实验班超过一半的学生表示自己能够理解，对照班有点模糊和不理解的同学总共占比 37.7%比实验班高出了 22.2%，说明数学史融入课堂教学在一定程度上可以帮助学生理解数学知识。

第六题：你能清晰描述解已知两个数的和与差，求这两个数的过程吗？

A. 非常清晰      B. 清晰      C. 有点模糊      D. 不清楚

G1 实验班统计数据:

|    |    |    |   |   |
|----|----|----|---|---|
| 选项 | A  | B  | C | D |
| 人数 | 12 | 26 | 4 | 3 |

C1 对照班统计数据:

|    |    |    |   |   |
|----|----|----|---|---|
| 选项 | A  | B  | C | D |
| 人数 | 10 | 18 | 8 | 7 |



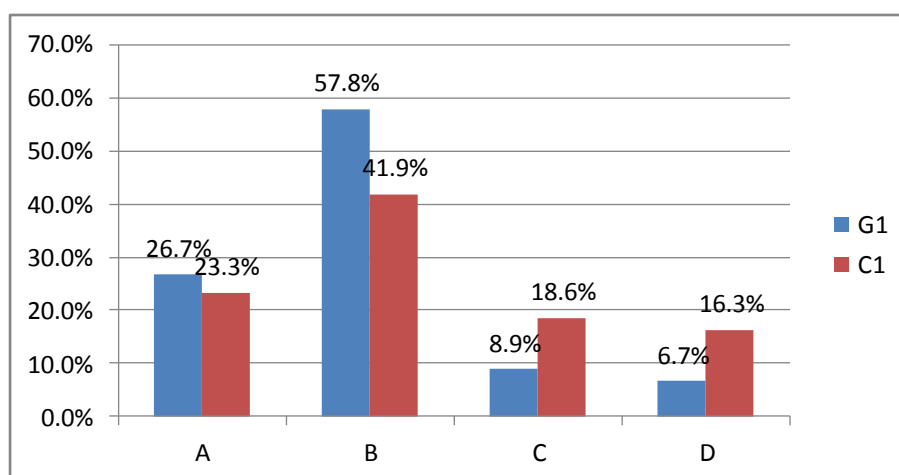


图 4-7 问题 6 数据统计比例图

第六题是一道综合应用题，对学生的理解能力要求较高，该题目实验班和对照班的教师在课堂上都进行了思路讲解，但实验班还有 8.9% 的学生对解题过程思路不清楚，同样对解题过程思路不清的同学对照班高达 18.6%，实验班对解题过程非常清楚的同学有 26.7% 比对照班高 3.4%，实验班对解题过程清楚的同学超过了一半，并且比对照班高了 15.9%，说明利用数学史融入“用字母表示数”的顺利式进行教学，可以帮助学生深度理解。

第七题： $b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

笔者根据调查问卷中学生答题情况将答案分为了正确、不完全正确、错误三类，正确的答案是：将字母“ $b$ ”看作未知数直接列方程，记作类型 I；不完全正确又分为：1. 将未知数“ $b$ ”又设成了字母“ $x$ ”，记作类型 II；2. 代入特殊值求解，记作类型 III；错误的是：不理解“……比……大”的意思，记作类型 IV；其他解题过程记作类型 V，每种类型对应的解题过程如下：

3.  $b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

$$\begin{aligned} b+2-2b &= 1 \\ -b &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

类型 I

3.  $b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

解：设  $b$  为  $x$ ，则  $x+2-2x=1$

$$\begin{aligned} -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

类型 II

$b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

$b=1$  时  $1+2=3$

$$\begin{aligned} 1 \times 2 &= 2 \\ 3-2 &= 1 \end{aligned}$$

类型 III

$b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

$$\begin{aligned} b+2 &> 2b+1 \\ b+2-2b &> 1 \\ 2-b &> 1 \\ 1 &> b \end{aligned}$$

类型 IV

七年级学生已经正式学习过一元一次方程，实验组和对照组的大部分学生都

能用列方程的方法求解，但还是有个别学生列了不等式，两个班同学的典型错误以及解答正确和错误的人数笔者也做了记录和统计。

G1 实验班答题情况数据统计：

| 答题情况  | 类型  | 人数 |
|-------|-----|----|
| 正确    | I   | 29 |
| 不完全正确 | II  | 4  |
|       | III | 2  |
| 错误    | IV  | 4  |
| 其他    | V   | 6  |

C1 对照班答题情况数据统计：

| 答题情况  | 类型  | 人数 |
|-------|-----|----|
| 正确    | I   | 26 |
| 不完全正确 | II  | 5  |
|       | III | 3  |
| 错误    | IV  | 4  |
| 其他    | V   | 7  |

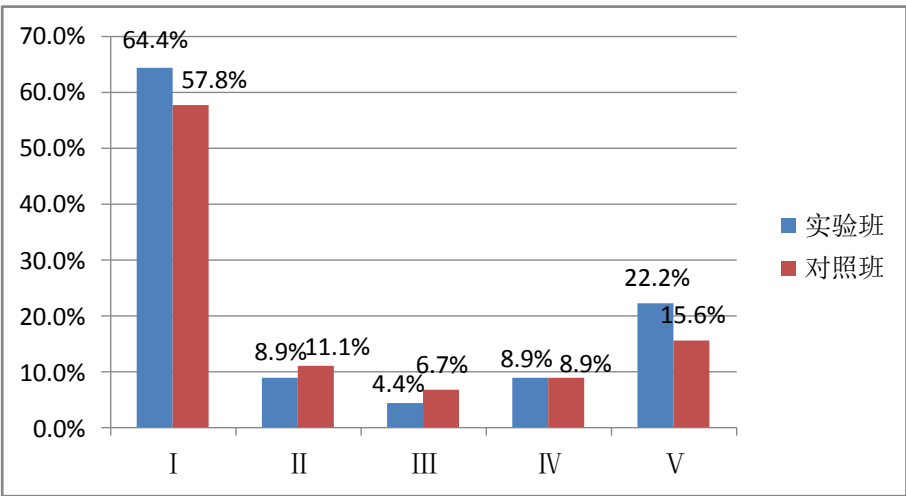


图 4-8 问题 7 数据统计比例图

第七题比较简单，从以上数据也可以看出：实验班和对照班能够正确解题的人数都超过了 50%，实验班比对照班高 6.6%；类型 II 和类型 III 虽然结果正确，但类型 II 的同学认为未知数只能用“ $x$ ”表示，类型 III 的同学用的是代特殊值，这两类同学被认为对字母表示数的理解处在“缩略代数”阶段，认知处在这一阶段的同学对照班比实验班多 2.2%，需要继续加强字母表示“任意数”的练习，错误的同学对语句“……比……大”不理解，其中有列不等式的，还有大小关系搞

反的,两个班的人数相同,也再次说明两个班学生的学业水平相似;其他错误表现为解方程步骤出错等一些粗心造成的错误。

第八题: (1)  $A+B+C=C+A+B$

对 错 不确定 因为\_\_\_\_\_

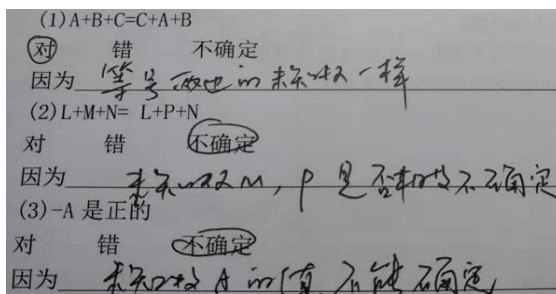
(2)  $L+M+N= L+P+N$

对 错 不确定 因为\_\_\_\_\_

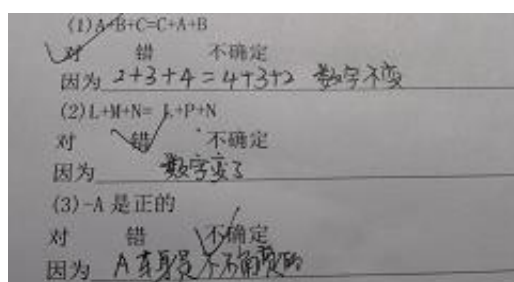
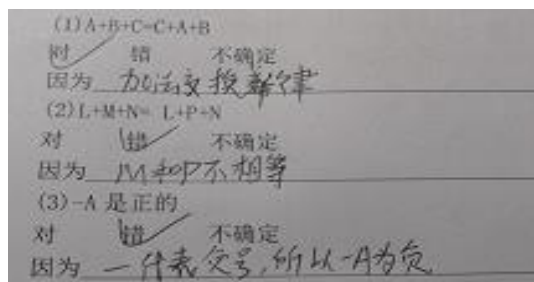
(3)  $-A$  是正的

对 错 不确定 因为\_\_\_\_\_

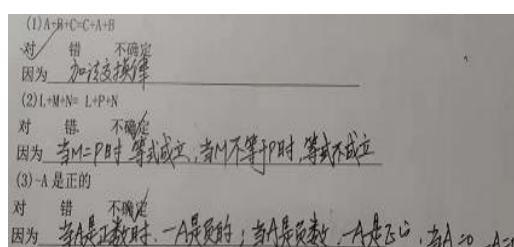
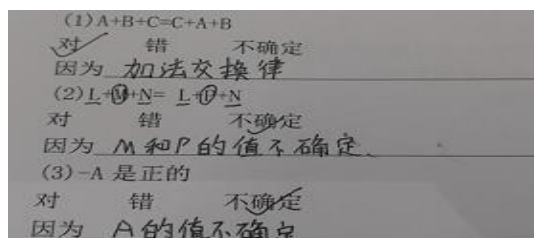
第八题都是字母表示任意数的题,但学生由于对“用字母表示数”没有完全理解,出现了各种错误,笔者根据学生的解题情况将“字母代表一类数理解成了未知数”记作类型 I;将“认为相同的字母代表相同的值”记作类型 II;“正确理解字母表示一类数”记作类型 III;对该题是其他理解的记作类型 IV。每种类型对应解题过程如下:



类型 I



类型 II



类型 III

针对以上 3 种解题类型,笔者将实验班和对照班的学生问卷进行了分类并且统计了相应的数据。

G1 实验班数据统计：

| 类型 | I | II | III | IV（其他） |
|----|---|----|-----|--------|
| 人数 | 4 | 9  | 28  | 4      |

C1 对照班数据统计：

| 类型 | I | II | III | IV（其他） |
|----|---|----|-----|--------|
| 人数 | 5 | 10 | 24  | 6      |

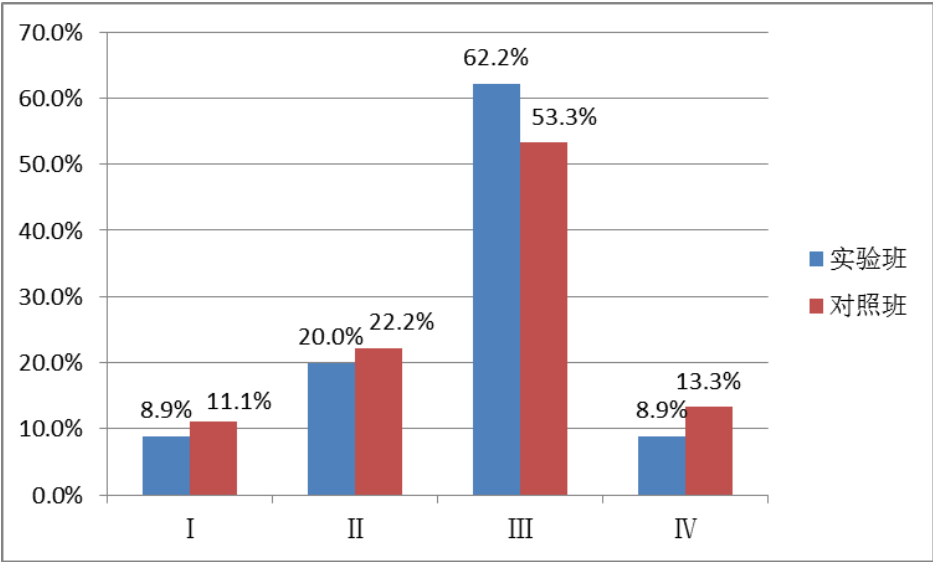


图 4-9 问题 8 数据统计比例图

从这些回答中看出，出现错误类型 I 的学生把该题的字母理解成了未知数，他们认为只要是数值不确定的字母就表示未知数，说明对字母表示任意数的概念并没有完全理解；出现错误类型 II 的学生认为相同的字母代表相同的数字，不同的字母也应代表不同的数字，没有理解字母可以代表任意数，两个不同的字母表示的数值可能相同；回答正确的同学思路都是非常清晰的，可能出现的所有情况都有考虑，说明对用字母表示任意数以及任何数理解非常到位。从统计数据来看，实验班在错误类型 I 中占比 8.9%对照班占比 11.1%，在错误类型 II 中实验班占比 20.0%对照班占比 22.2%，实验班答案正确的占 62.2%比实验组高 8.9%，其他类型中实验班占比 8.9%对照班占比 13.3%。可以看出，融入“用字母表示数”的数学史进行教学的班级在错误类型 I 和错误类型 II 中的比例都小于没有融入数学史进行教学的班级人数，说明数学史融入“用字母表示数”教学效果一定程度上优于没有数学史融入的教学。

4.2.2 教师访谈反馈分析

实习学校每周都会请专家到学校指导教师教学，笔者执教那天，刚好是学校

教研日,因为笔者的师傅是年级备课组长,所以邀请了专家教师听课,为了方便叙述,以下简称教师B,教师G是笔者师傅,教师C是办公室同事,访谈前笔者已向各位教师介绍了“用字母表示数”的发展史以及笔者采用的数学史融入方式,教师B之前对数学史有一定的了解。

笔者:各位老师对这节课有什么感受?

教师A:学生的课堂参与度要比以前好,探究的积极性也比较高,尤其是讲到学生的想法和数学家一样,可以明显感觉到学生非常的开心和自豪,当学生在教师的带领下从“缩略代数”阶段跨越到“符号代数”阶段时,学生还窃窃自喜。

教师B:学生探究的积极性确实比以前高,课堂小结时学生对本次课内容有清晰的认识,可以大致说出“用字母表示数”的发展史而且还可以解释“用字母表示数”在相应阶段的内容。

教师C:整节课学生都是很开心的在学习,讨论的非常激烈,有的还说自己是小韦达。

分析:学生能够主动探究,说明对教学内容感兴趣,学生发现自己和伟大的数学家们竟然有相同的想法时,尤为激动。著名心理学家皮亚杰认为:“所有有成效的工作都必须以兴趣为先决条件。”兴趣是最好的老师,学生想要高效地获取知识,首先要对所学知识感兴趣,没有兴趣的学习会让学生感到学习是一种痛苦,而且学习效率也不会高。

笔者:针对这节课,各位老师有什么建议?

教师A:课堂氛围很好,学生的参与度非常高,可以看出学生对这种教学方式还是很喜欢的。

教师B:是呀!学生对游戏都很感兴趣,但由于新知探究利用的是数学史融入课堂的顺应式和重构式进行教学设计,属于隐形融入,学生不能很好体会到数学史的味道,如果在引入部分介绍“用字母表示数”发生发展的数学史知识时加入相应的例子帮助学生理解一下,学生就会明白很多。

分析:课前向学生讲述“用字母表示数”的发展史,可以使学生了解“用字母表示数”的发生发展过程,体会“用字母表示数”发展过程的曲折以及数学家们探索这一知识的不易,可以激发学生的探究兴趣,提高课题效率,为顺利开展探究活动奠定基础。

教师C:例4的综合性很强,是一道很好的拓展拔高题,很多学生其实都想不到字母表示“已知数”,说明学生对字母表示任意数还不能够熟练应用,学生的解答过程刚好对应“用字母表示数”的“修辞代数”阶段和“缩略代数”阶段,因此就可以对学生进行引导向“符号代数”过渡。

教师C:刚好可以让学生再体会一下“用字母表示数”的发展过程。

教师 B: 我发现好多同学代特殊值求解。

教师 A: 应还有用图形表示的。

教师 C: 程度好的只用字母表示了未知数, 没想到表示已知数。

笔者: 那笔者刚好可以借用例 4 带领学生回顾“用字母表示数”的发展过程, 例 4 还可以用来检测学生对“用字母表示数”的理解情况。

分析: “已知两个数的和与差, 求这两个数。”是区分学生理解能力很好的一道题目, 孙洲在《HPM 视角下“用字母表示数”的教学》<sup>[7]</sup>中就是根据学生对“用字母表示数”的认知不同就会有相应的解法展开教学的, 将这道题目作为拓展拔高题, 既可以对学生的思维进行扩展, 还可以对本次课内容进行梳理, 为接下来学生巩固小结提供清晰的思路。

教师 A: 例 1 用算术方法确实要比方程简便, 所以学生没有必要使用方程求解, 将例 1 换作一道找规律的题可以更好地让学生体验字母表示数的好处, 教学效果也许会更佳。

分析: 蒲淑萍、汪晓勤老师在《学生对字母的理解: 历史相似性研究》中也表示: 在“用字母表示数”的教学内容中应增加“修辞代数”、“缩略代数”与“符号代数”3 个阶段中两个连续环节之间的衔接过渡, 增加在字母意义水平上前后衔接的内容, 以利于学生对新知的接纳与衔接理解<sup>[4]</sup>。例 1 应该是一道能起到“承上启下”作用的一道题目, 带领学生从“修辞代数”阶段过渡到“缩略代数”阶段。

教师 C: 巩固练习部分可以加上例 3 类型的题目, 学生不仅要能够根据题意写出代数式还要能够熟练的说出代数式表示的意义。

笔者: 好的!

教师 A: 最后插入关于“ $\times$ ”和“ $\bullet$ ”省略的数学史也挺好的, 很多学生只会用根本不知道为什么可以省略。

笔者: 谢谢各位老师的宝贵意见, 我会对教学设计进行修正的, 希望明天的课堂效果有所提高。

教师(所有): 会的, 加油!

分析: 三位教师都对数学史融入“用字母表示数”进行教学设计得到了肯定, 学生参与探究的积极性高于用传统教学设计进行授课, “兴趣是最好的老师”学生在数学上能够有大的发展必须对数学感兴趣, 笔者接下来对根据各位教师的建议进行教学设计的修改, 以期达到更好的教学效果。

总结反思: “经验可以指导教学”, 各位教师的建议都直击要点, 指出了本次课教学设计的优点和不足, 主要问题有: (1) 引入环节缺少“用字母表示数”发展史的介绍; (2) 例 1 不利于“修辞代数”阶段向“缩略代数”阶段过渡;

(3) 例3缺少数学史的融入, (4) 巩固练习部分缺少理解代数式意义的题目。针对以上3个问题教师也给出了相应的修改建议: (1) 加入“用字母表示数”发生发展的数学史; (2) 将例1替换为一道找规律的题; (3) 借用“用字母表示数”的3个重要阶段引导学生; (4) 加入练习2: “运动会期间, 学校买了26个篮球, 每个篮球 $r$ 元; 买了 $z$ 个足球, 每个足球32元, 代数式 $26r+32z$ 代表什么意思?”

### 4.2.3 课堂实录反馈分析

#### 一、情景引入

师: 马上就到猪年了, 我们来做一个和小猪有关的游戏! 游戏规则: 第一个同学说“一只小猪4条腿, 两只小猪几条腿?” 第二个同学接着说“两只小猪8条腿, 三只小猪几条腿?”, 第三个, 第四个就这样接着说, 跟不上节奏的淘汰出局。

(同学们兴致勃勃地说了起来)

师: 能说完吗?

生(齐声): 不能。

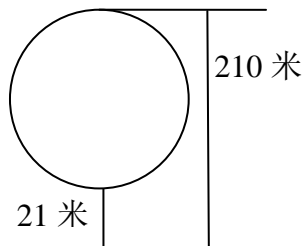
师: 有没有什么方法概括一下?

生(齐声): “用字母表示数”(板书课题)

分析: 兴趣是最好的老师, 用游戏引入可以激发学生的数学学习兴趣, 而且游戏的设置还可以巧妙的引出本节课课题, 之后向学生介绍“用字母表示数”历史发展的3个重要阶段, 使学生对本节课的思路有一个整体认识, 为课程的顺利进行做铺垫。

#### 二、新知研究

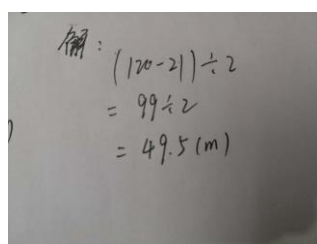
例1: 有“亚洲第一”之称的长沙摩天轮于2004年9月30日建成, 当你10月1日对外开放, 是亚洲第一、世界第二的摩天轮。长沙摩天轮最令人称奇之处在于它立在巨型屋顶上, 据专家介绍, 将摩天轮建在屋顶上在世界上都是独一无二的。如果摩天轮垂直于地面时, 最高点离地面120米, 最低点离地面21米, 那么这个巨型摩天轮的半径是多少?



师: 请同学们拿出课前给你们发的A4纸, 将例1的解题过程写下来!

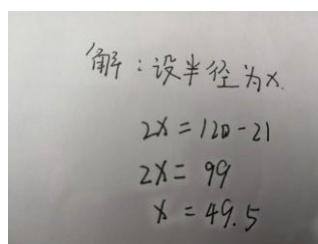


学生的解题情况，教师在巡视过程中及时拍下取证。



$$\begin{aligned} \text{解: } & (120-21) \div 2 \\ & = 99 \div 2 \\ & = 49.5 (\text{m}) \end{aligned}$$

(I)



$$\begin{aligned} \text{解: 设半径为 } x. \\ 2x &= 120-21 \\ 2x &= 99 \\ x &= 49.5 \end{aligned}$$

(II)

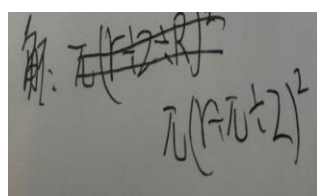
班级里的绝大部分同学都能做对，只有两个同学只算到了直径，这两个同学是班级里成绩最差的，平时作业都不能够完成的。

师：老师课前向大家介绍了“用字母表示数”发展的3个阶段，大部分学生都是用方法（I）求解的，如果只想到了这一种方法，说明在想法上和数学家花拉子米非常相似，都没有想到用字母表示未知数，用方法（II）求解的同学想到了可以用字母来表示未知数，说明思维已经向“用字母表示数”的第二个阶段跨越了。

分析：这道题目的正确率非常高，也是意料之中的事情，正确的学生中大部分都选择算术方法，可能是受“先入为主”思想的影响，学生最开始学习解应用题就是用的算术方法，如果学生看到题目只想到了算术方法说明他们的对“用字母表示数”的认知还停留在“修辞代数”阶段，如果想到了算术和方程两种方法，说明这部分学生对“用字母表示数”的理解更深刻，向学生分析他们目前对“用字母表示数”的理解层次有助于学生清楚自己接下来要学习的方向。但由于这道题目对七年级学生来说，确实简单了点而且用算术方法确实容易，不利于向“缩略代数”过度，所以在进行教学设计改进时，要根据专家老师的建议考虑是否将例1换掉。

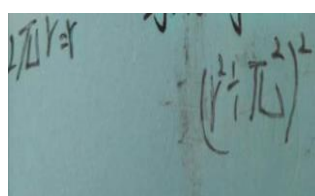
师：请同学们完成例2。

例2：已知圆的周长为  $r$ ，求圆的面积。（ppt 出示）



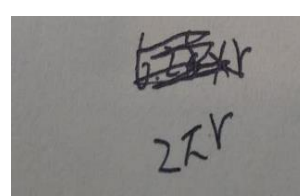
$$\pi(R-\pi/2)^2$$

(III)



$$(r^2 - \pi^2)^2$$

(IV)



$$2\pi r$$

(V)

生IV：老师，你写错了吧！字母“ $r$ ”应该表示的是圆的半径。

生V：我也感觉。

师：其他同学怎么看？

生III：好像也没有规定字母“ $r$ ”只能表示圆的半径吧。



师：看来同学们的意见不统一呀！那小组之间讨论一下，看看你们支持哪位同学的观点。

（同学们开始了激烈的讨论）

生V：老师我明白了，字母“ $r$ ”只是一个表示符号，在这道题中就表示的圆的周长。

师：大家同意吗？

生（齐声）：同意。

师：把字母“ $r$ ”换成其他的字母可以吗？

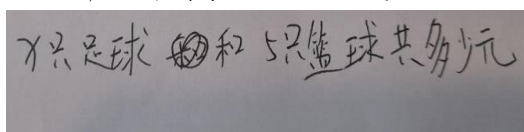
生（齐声）：可以。

师：历史上数学家们在解题时也发现了用丢番图方法解题的弊端，经过数学家们坚持不懈的努力，终于在16世纪，法国数学家韦达探索出字母只是一个符号，不应该有特定的意义，这样字母就可以表示一类数了，而不是特定的未知数，所以我们这道题目是没有问题的。

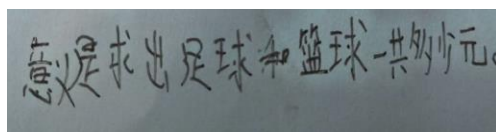
分析：学生能够提出用字母“ $r$ ”表示圆的半径是不正确的，说明学生在思考，学生接触的圆的半径都是用字母“ $r$ ”表示的，突然字母“ $r$ ”表示圆的周长，这与学生的固有认知产生了冲突，所以笔者也在此建议学生刚学习圆的面积的时候，教师应该加上“圆的半径一般用字母“ $r$ ”表示，告诉学生他们的想法和数学家丢番图一样，即使学生说错了也不会不好意思，反而会为自己和数学家丢番图想法一致而自豪，可以提高学生学习的自信心，引发学生继续向前学习的好奇心。

例3：运动会期间，学校买了26个篮球，每个篮球 $r$ 元；买了 $z$ 个足球，每个足球32元，代数式 $26r+32z$ 代表什么意思？（ppt出示）

师：请同学们继续完成例3。



（VI）



（VII）

在巡视过程中，除了四个同学没有写之外，都能够写出 $26r+32z$ 表示篮球和足球总共多少元。

师：生X能说一下你为什么没有写吗？

生X：我感觉这道题有问题，前面用字母表示篮球的钱数，后面字母却表示足球的个数，前后不统一。

师：谁来解答一下生X的疑惑？

生Y：字母可以表示任意的数，题目中两个字母不一样，所以可以表示不同

的意义。

师：生X你理解生Y的意思了吗？

生X：明白了。

师：通过例2的探究，同学们例3的正确率非常高，我们通过一节40分钟的课就学习完了数学家几个世纪探索出来的东西，是不是感觉自己特别厉害！

生1：我们是在老师的引导下学习的，所以比较快，数学家们全靠自己的摸索，所以我还是很佩服数学家们的。

师：说的非常好！我们今天学习的知识都是数学家们通过坚持不懈的努力探索出来的，所以，我们不仅要尊敬这些数学家更要尊重这些来之不易的知识，遇到问题不退缩，勇于探究，说不定下一个数学家就是你们其中的一个！

学生都露出了满意的微笑。

分析：生X的疑惑表明对“字母表示数”的最高层次——字母可以表示任意数理解得还不透彻，例3的正确率能够这么高，也说明题目比较简单，用字母表示任意数是本节课的重点也是学生理解的难点，在学生解完例3后应该再出示一道难度再大点的题，对学生进行拓展提升。

例4：已知两个数的和与差，求这两个数。

4. 已知两个数的和与差，求这两个数。

解：设

$$\begin{aligned} x - (40 - x) &= \frac{1}{2} \\ x - 40 + x &= \frac{1}{2} \\ 2x - 40 &= \frac{1}{2} \\ 2x &= \frac{1}{2} + 40 \\ 2x &= \frac{81}{2} \\ x &= \frac{81}{4} \end{aligned}$$

另一个数：

$$\begin{aligned} 40 - (40 - x) &= \frac{1}{2} \\ 40 - 40 + x &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以这两个数分别为  $\frac{81}{4}$  和  $\frac{1}{2}$

解：设这两个数分别为x和y，它们的和为a，差为b

$$\begin{aligned} x + y &= a \quad ① \\ x - y &= b \quad ② \\ ① + ② \text{ 得} \\ 2x &= a + b \\ x &= \frac{a+b}{2} \\ ① - ② \text{ 得} \\ 2y &= a - b \\ y &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

所以这两个数分别为  $\frac{a+b}{2}$  和  $\frac{a-b}{2}$

师：这道题目是有一定难度的，小组之间互相说一说，尽量小组之间得到解决。

经过小组讨论，发现班级里有接近 $\frac{1}{3}$ 的同学可以通过第一种方法解题；接近一半的同学使用了“韦达”方法——用字母表示已知数；还有一些同学使用的是“丢番图”方法——代特殊值，另外有3个同学不知道如何求解。

分析：本题属于思维拓展题，安排在最后一道例题的位置既可以让学 生有所挑战，也可以检验学生对本节课知识的掌握情况，学生经历了“用字母表示数”发生发展的过程后大部分学生都可以正确求解，甚至有接近一半的同学应用了字母表示已知数，说明本节课的精心设计对学生的理解是有帮助的。

### 三、巩固练习

练习1：设某数为 $x$  ( $x \neq 0$ )，用 $x$ 表示下列各数。（ppt出示）

- (1) 比某数的一半多2的数。
- (2) 某数减去5的差与10的积。
- (3) 某数与12的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的4倍除以某数的商。

师：学完了这节课，相信同学们心中对“用字母表示数”都有一个清晰的认识了，请完成练习1进行自我检测。

分析：字母和字母相乘、数字和字母相乘，乘号可以省略不写或者用“ $\bullet$ ”代替，传统教学中，教师只是告诉学生可以这样表示，学生也就死记硬背，但学生的心理关于为什么可以这样表示还是有很多疑惑的，这种规定也有相应的数学史，设计该类型的题目，适时插入相应的数学史可以帮助学生理解这一规定解除心中的疑惑。

#### 四、课堂小结

师：哪位同学总结一下我们今天学习的内容？

生2：我们知道了“用字母表示数”的发展历史，了解了数学家们探索新知识的不易；我们遇到问题不应该退缩，要像数学家们一样勇往直前。

师：非常好！要学习数学家们的精神！还有没有要补充的？

生3：我们还学习了在解应用题时如果用算术方法比较繁琐要想到用方程的方法求解；还学习了字母只是一个符号不应该有特定的意义，比如字母“ $r$ ”就不是只能表示圆的半径，圆的周长、正方形的边长等都可以用字母“ $r$ ”表示。

师：回答得非常完整！

分析：学生首先想到的都是课前引入的那段数学史，说明学生对数学史还是比较感兴趣的，学生在自主探索的过程中也体会到了数学家的不容易和坚持不懈的高尚品质，学生还能够说出算术方法比方程繁琐，说明他们已认识到“用字母表示数”解题的方便和重要。

### 4.3 反思

数学史融入课堂教学的初步效果已经显现，学生的参与度明显提高，从学生反馈来看，都很喜欢这种上课方式，有助于他们理解，既然数学史融入课堂能够引起学生的学习兴趣，作为一名准数学教师，应该多搜集数学史资料，多和有经验的教师交流，设计出更多更好的教学设计，帮助学生学好数学。学生也表示对本次课的重点：理解“用字母表示数”的意义已经理解，对于难点：理解用字母表示一类数也基本突破，但在教学设计上也暴露了一些问题：主要问题有：（1）

引入环节“用字母表示数”发展史的介绍过于粗略，学生对 3 个阶段的名称是完全陌生的不容易理解；（2）例 1 不利于“修辞代数”阶段向“缩略代数”阶段过渡；（3）例 4 作为重点题目讲解不够详细；（4）巩固练习部分缺少理解代数式意义的题目。针对以上 3 个问题教师也给出了相应的修改建议：（1）插入“用字母表示数”发生发展的数学史时举出相应的例子；（2）将例 1 替换为一道找规律的题；（3）借用“用字母表示数”的 3 个重要阶段引导学生；（4）加入练习 2：“运动会期间，学校买了 26 个篮球，每个篮球  $r$  元；买了  $z$  个足球，每个足球 32 元，代数式  $26r+32z$  代表什么意思？”但时间会比较紧张可以把例 3 放到习题中。不管是利用数学史的点缀式还是顺应式进行教学设计，教师都应该阅读与该知识有关的大量文献，对数学史有丰富的储备，不然就是华而不实，除了能够让学生多了解一些数学史知识外，教学效果甚微；利用数学史的顺应式进行教学设计，让学生重新经历数学家发现数学知识的过程可以提高学生的学习兴趣 and 自信心，同时也能够帮助学生对知识达到深度理解；教师不应该为了融入数学史而融入数学史，应该具体分析数学史融入后会带来哪些影响，如果利大于弊就可以适当融入，如果新授内容不适合数学史的融入也不要强硬地往教学里加，如此，就会失去数学史的价值。

4.4 数学史融入“用字母表示数”教学设计二

针对第一轮研究得到的反馈和反思，开展第二轮研究，所以教学设计大的框架和主体内容只是适度调整，和第一轮相同的内容在第二轮将不再做详细叙述。第二轮的教学设计，将从第一轮实施后暴露出的问题上有针对性的进行修改调整。

表 4-1 教学设计改进表

| 问题   | 改进                                    |
|--|---------------------------------------|
| （1）引入环节“用字母表示数”发展史的介绍过于粗略。                 | 介绍“用字母表示数”历史发展的 3 个阶段时加上相应的例子，帮助学生理解。 |
| （2）例 1 用算术方法明显好于方程，不适合作为“修辞代数”向“缩略代数”过度的例子 | 从找规律的题目出发，由“修辞代数”向“缩略代数”过渡。           |
| （3）例 3 缺少数学史的融入                            | 借用“用字母表示数”3 个阶段的发展史引导学生解题             |

|                        |  |
|------------------------|--|
| (4) 巩固练习部分缺少理解代数式意义的题目 | 设计练习 2: “运动会期间, 学校买了 26 个篮球, 每个篮球 $r$ 元; 买了 $z$ 个足球, 每个足球 32 元, 代数式 $26r + 32z$ 代表什么意思?” |
|------------------------|--|

#### 4.4.1 教学设计意图

为了使第二轮中的教学设计能够达到改进目的, 教学内容的设计意图如下:

情境引入: 在第一轮教学实施中, 学生对接龙游戏很感兴趣, 并且可以自然地引入课题, 所以, 第二轮教学设计的情境引入仍使用接龙游戏。引出课题“用字母表示数”后, 介绍相关数学史并在每个阶段举出对应的例子帮助学生理解。

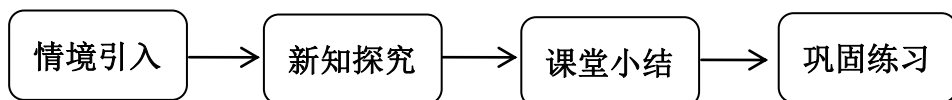
新知探究: 例 1 作为新知探究“修辞代数”阶段向“缩略代数”阶段的过渡, 设计一道找规律的题目。大部分学生都可以正确写出答案但用字母表示出规律是比较困难的, 这部分学生对“用字母表示数”的认知仍然停留在“修辞代数”阶段, 程度比较好的学生能够探索出规律并且用字母表示规律。出现不同的方法时, 让学生分析哪种方法好, 开展探究活动, 让学生意识到用文字叙述或者画图的繁琐, 体会用字母表示的便利, 自然过渡到“缩略代数”阶段。例 2 设计一道用字母“ $r$ ”表示圆周长的题目, 该题在第一轮教学设计中也有, 并且根据课堂反馈和教师访谈反馈发现教学效果明显, 因此, 第二轮教学设计仍使用例 2 作为“缩略代数”阶段向“符号代数”阶段的过渡。例 3 设计一道拓展提升题“已知两个数的和与差, 求这两个数。”根据学生的理解带领学生重新经历“用字母表示数”历史发展的 3 个阶段, 帮助学生深度理解。

巩固练习: 该环节习题设置在第一轮的基础上添加练习 2, 使学生不仅能够根据题意写出代数式, 还能够理解代数式的意义。

课堂小结: 小结作为课堂教学的最后一个环节至关重要, 学生可以根据教师的板书在头脑中对知识进行梳理, 也可以把自己本节课学到的知识讲给同桌听查漏补缺, 教师根据学生的小结情况可以判断出学生的掌握情况, 为下次课的内容设计做好铺垫。

#### 4.4.2 教学设计内容

本课时的教学由四个环节构成:



第一环节: 情境引入

今天我们一起做一个小游戏，游戏规则：第一个同学说“一只小猪4条腿，两只小猪几条腿？”，第二个同学接着说“两只小猪8条腿，三只小猪几条腿？”，第三个，第四个就这样接着说，跟不上节奏的淘汰出局。

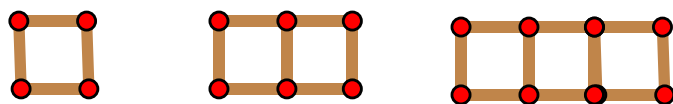
引出“用字母表示数”。

我们现在看“用字母表示数”不过是很小的一块知识，但是，历史上数学家们为了研究这一内容却经历了好几个世纪，其中，关键的跨越性阶段主要有3个，历史上称之为“修辞代数”阶段、“缩略代数”阶段、“符号代数”阶段，通俗的讲，“修辞代数”就是解题时没有字母出现，全部用文字叙述，相当于我们今天的用算术方法解题，“缩略代数”就是每个字母都有特定的意义，比如字母“S”只能代表“面积”，字母“C”只能表示“周长”，这样就导致不能找到通用的解题方法，就有人开玩笑说“用丢番图的方法解方程，解了100道可能还是不知道第101道的方法。”但是，还是经历了大约两千年的时间才从修辞代数跨越到缩略代数，“符号代数”是字母表示数的最高阶段，此时字母可以表示任意的数，为我们的解题带来了很大的方便。现在，让我们跟随历史的脚步，一起经历这一伟大的发现过程。

设计意图：通过游戏引入课题“用字母表示数”，然后向学生介绍“用字母表示数”的发展史，可以使学生感受“用字母表示数”的发生发展过程，体会数学家发现这一知识的不易，提高学生的探究兴趣，提高课堂效率。

第二环节：新知探究

例1：课件依次出示：用小棒围成的1个正方形、2个正方形组成的长方形、3个正方形组成的长方形。



教师提问：按照这样的排列，5个正方形组成的长方形需要几根小棒？7个呢？

推测一部分学生会选择画图的方法，将第5个图像和第七个图像都画出来；有的学生是观察图形中小棒排列的规律得出结果的；个别程度好的会找到序号和小棒数之间的关系用字母表示出来。

设计意图：大部分学生都可以正确写出答案但很难想到用字母把序号和小棒数之间的规律写出来，这部分学生对“用字母表示数”的认知仍然停留在“修辞代数”阶段，只能说出具体的一个图形需要的小棒数，但不会表示任意一个，程度好的学生应该会探索出规律并且能够用字母表示。此时，让学生分析哪种方法好，开展探究活动，让学生意识到用文字叙述或者画图的繁琐，体会用字母表示的便

利,引导学生向“缩略代数”阶段过渡。

例2: 已知圆的周长为  $r$ , 求圆的半径。(ppt 展示)

解: 圆的面积为:  $(r \div 2 \div \pi)^2$

虽然例1已经讨论过“用字母表示数”的方便,但对字母可以表示什么的样的数没有展开讲,基于第一轮教学实施的经验,学生看到题目后,还是会发出“老师,你是不是写错了,字母‘ $r$ ’代表的是半径,你写的周长是  $r$ ”的疑惑,教师此时给予回应:“你的反应非常快,立马就想到了我们以前都是用字母‘ $r$ ’表示圆的半径,我们伟大的数学家丢番图当时也认为每个字母只能表示特定的意思,比如字母‘ $r$ ’只能表示圆的半径,这样对于不同的题用到的字母就不一样,大家觉得这种方法好吗?”可以引导学生思考老师说的话,之后让小组之间讨论一下丢番图方法的利弊,让学生自己提出的问题,在学生之间得到解决。

由于两个实验班的学生学业水平相当,所以学生也能够讨论出字母只是一个表示符号,不具有特定意义的结论,教师总结丢番图方法的不足,引出韦达的发现,实现“缩略代数”向“符号代数”的跨越。

设计意图:在例2的总结中,适当的融入数学史,告诉学生他们的想法和历史上数学家的想法相似,让学生知道我们现在使用的每一个数学结论都是经过数学家一步步探索出来的,让学生经历字母表示数的发展过程,告诉学生他们现在的想法数学家也遇到过,提高学生的学习自信心,培养学生遇到问题不怕出错,善于思考的品质。

例3: 已知两个数的和与差,求这两个数。

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

这道题对学生来说难度是比较大的,经过前面的学习,大部分学生应该都能够想到用字母表示,但是想到更多的是用字母表示未知数,很少会想到用字母表示已知数。

设计意图:例3选自孙洲的《HPM 视角下“用字母表示数”的教学》<sup>[57]</sup>,在文章中作者基于历史的相似性,采用数学史融入课堂教学的顺应式进行教学设计,这道题目在理解和应用上对学生的要求都比较高,通过对例3的理解可以帮助学生对“用字母表示数”的理解更加深刻,在解题时肯定还有部分学生虽然知道了字母表示任何数,但做题时认知还是会在“修辞代数”和“缩略代数”上停

留,因此,针对学生做题遇到的困惑和对“用字母表示数”认知阶段对题目进行分析,并让学生认识到他们现在遇到的困难数学家也遇到过,以此鼓励学生,这样,学生就能够清晰认识到自己在哪个阶段理解的不好,有目标的补救。

### 第三环节:巩固练习

练习1: 设某数为 $x$  ( $x \neq 0$ ), 用 $x$ 表示下列各数。

- (1) 比某数的一半多2的数。
- (2) 某数减去5的差与10的积。
- (3) 某数与12的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的4倍除以某数的商。

练习2: 运动会期间, 学校买了26个篮球, 每个篮球 $r$ 元; 买了 $z$ 个足球, 每个足球32元, 代数式 $26r+32z$ 代表什么意思?

解: 练习1: (1)  $\frac{1}{2}x+2$   
(2)  $10(x-5)$   
(3)  $(x+12) \div x$   
(4) 4

练习2:  $26r+32z$ 表示学校购买的篮球和足球的总价。

分析: 练习1既可以帮助学生巩固新知, 也可以为接下来学生学习代数式奠定基础。学生在解题时会出现将数字和字母 $x$ 之间用“ $\times$ ”连接的现象, 这时可以插入一段关于“ $\times$ ”在乘法算式里的小故事帮助学生理解。

学生很多时候都知道在乘法算式里“ $\times$ ”可以省略, 但问其为什么可以省略都说不出来, 插入这一段小历史可以帮助学生较好的理解为什么在乘法算式里“ $\times$ ”可以省略, 同时感悟数学的科学严谨, 体会每一种规定都是有它的历史原因的。

教学要求学生不仅能够根据题目写出代数式还要能够理解代数式的意义, 练习1和练习2相辅相成, 不可或缺。

### 第四环节: 课堂小结

通过例3的学习, 学生对“用字母表示数”的发展史有了更深刻的认识, 学习完例3后, 及时带领学生回顾总结, 学生大脑中能够形成一个清晰的思路, 大部分学生都能够自己小结出本次课主要内容。

分析: 课堂小结是非常有必要的, 可以帮助学生理清思路, 对课堂内容有一个清晰的认识, 一定程度上也可以把上课思想偶尔“开小差”的同学缺失的重要内容补救上。



## 4.5 反馈分析

### 4.5.1 学生问卷反馈分析

为了比较改进后的教学设计是否使学生对“用字母表示数”的认识更深刻，对实验班 G2 进行了问卷调查，问卷内容和第一轮教学实施后实验班 G1 使用的是同一份问卷，所以，实验班 G1 的数据取自第一轮的调查数据，G1 实验班和 G2 实验班人数不一样，所以采用百分比进行比较说明；为了使第四题和第五题的数据更有说服力，对这两个题采用相同的分类标准，学生解题过程的展示也和第一轮相同。

第一题：学完这节课，你认为“用字母表示数”在生活中有用吗？

A. 非常有用      B. 有用      C. 没有用      D. 不清楚

G1 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 22 | 20 | 0 | 3 |

G2 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 28 | 14 | 0 | 1 |

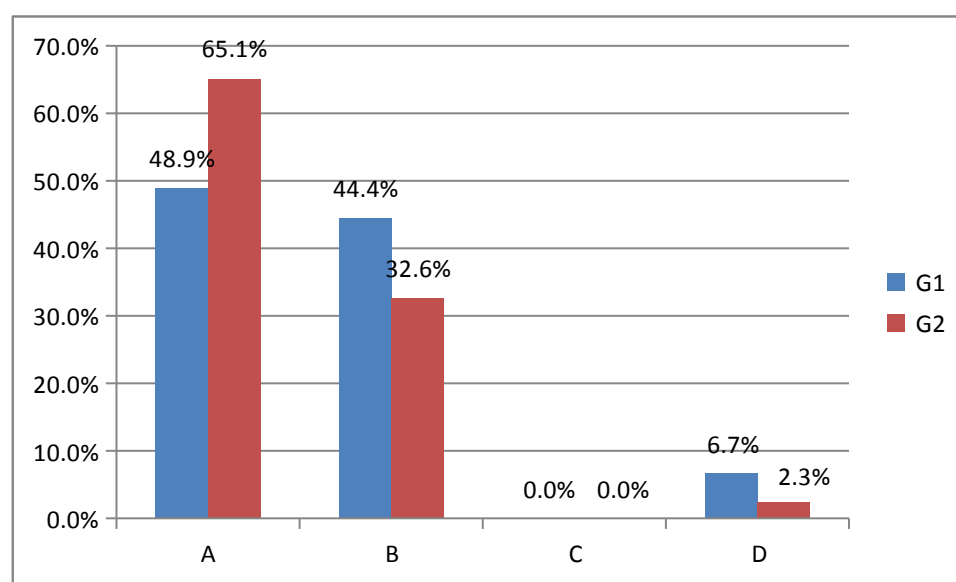


图 4-10 问题 1 数据统计比例图

从以上数据可以看出，无论 G1 实验班还是 G2 实验班都没有人认为“用字母表示数”是没有用的，G2 实验班认为“用字母表示数”“非常有用”的人占 65.1% 而 G1 实验班占 48.9%，G1 实验班比 G2 实验班高 16.2%，G2 实验班认为“用字母

表示数”“有用”的学生占 32.6%，G1 实验班占 44.4%，G2 实验班比 G1 实验班低了 11.8%，但“非常有用”和“有用”加在一起看，G2 实验班共占 93.3%，G1 实验班占 87.7%，G2 实验班比 G1 实验班高 5.6%，综上，G2 实验班的同学对“用字母表示数”的实用性更认可，教学设计二比教学设计一数学史的应用更加充分，说明数学史融入“用字母表示数”的课堂教学，可以提高学生对数学来源于生活又为生活服务的认识。

第二题：通过这节课的学习，你理解用字母可以表示任意数了吗？

A. 非常理解 B. 理解 C. 有点模糊 D. 不理解

G1 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 13 | 25 | 5 | 2 |

G2 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 21 | 19 | 2 | 1 |

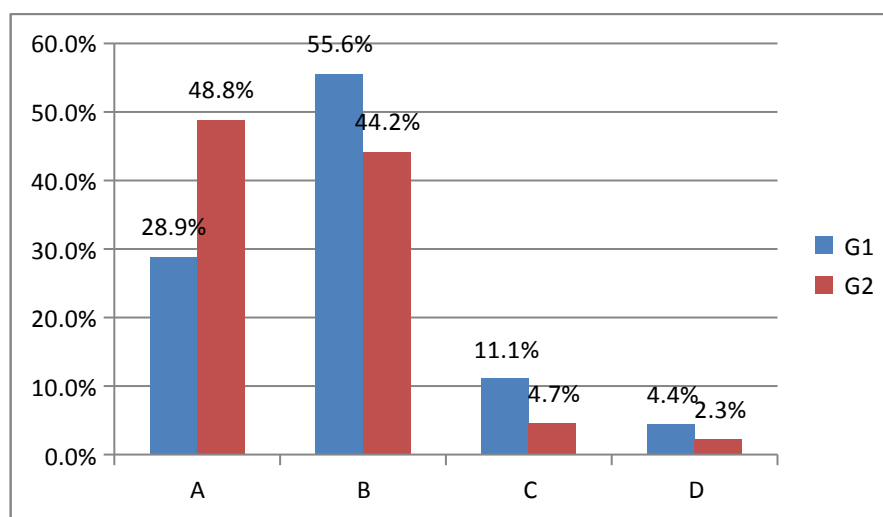


图 4-11 问题 2 数据统计比例图

从以上数据可以看出，G2 实验班认为对字母表示任意数非常理解的人数占 48.8%，G1 实验班占 28.9%，G2 实验班的比值高出 G1 实验班 19.9%，达到理解层次的比值，G1 实验班却比 G2 实验班高 11.4%，但“理解”和“非常理解”的比值加起来看，G2 实验班比 G1 实验班高 8.5%，整体来看，还是 G2 实验班理解得程度比较好，字母表示“任意数”是“用字母表示数”发展的最高阶段，只要学生能够理解，接下来进行相关的联系就能够熟练掌握。G2 实验班仍有 1 个同学表示自己不能理解字母表示“任意数”，笔者在继续对该生进行访谈，了解学生在那个环节的理解上出现了问题，为后续继续数学史融入“用字母表示数”

进行教学设计的改进提供依据。

第三题：你能清晰描述解已知两个数的和与差，求这两个数的过程吗？

A. 非常清晰      B. 清晰      C. 有点模糊      D. 不清楚

G1 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 12 | 26 | 4 | 3 |

G2 实验班统计数据：

| 选项 | A  | B  | C | D |
|----|----|----|---|---|
| 人数 | 24 | 14 | 3 | 2 |

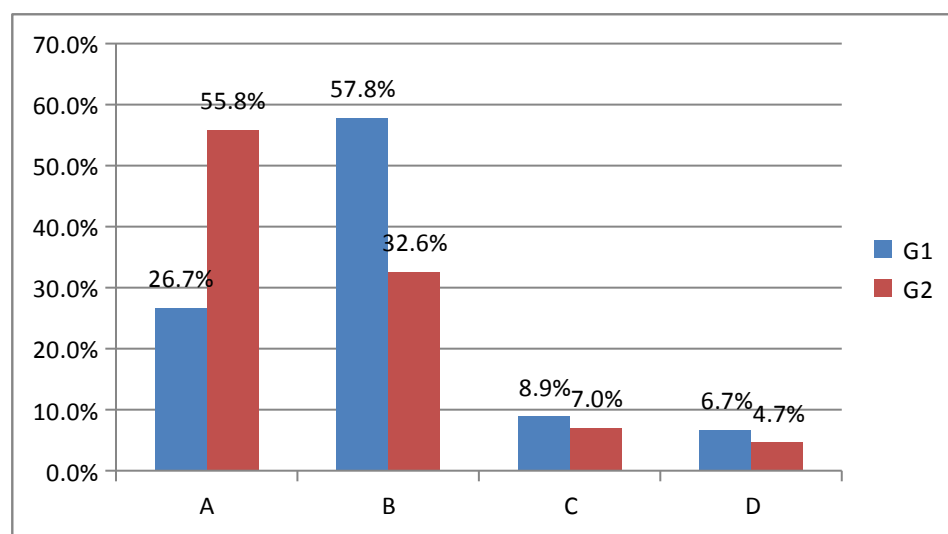


图 4-12 问题 3 数据统计比例图

在教学设计二中对第三题的讲解更加详细，不仅向学生讲解解题思路，而且对学生出现的困惑和数学史接轨，使学生清楚自己对“用字母表示数”的认知在哪个阶段出现了问题，接下来学生针对出问题地方加强练习，就可以有目标地向最高阶段迈进。G2 实验班有 33.8% 的同学认为自己对第三题的解题过程非常清晰，但仍有一个同学不清楚，有 7.0% 的同学对解题过程有点模糊，没能让全部的同学理解该题的思路，笔者略有遗憾；G1 实验班有 8.9% 的同学表示对解题过程有点模糊，还有 6.7% 的同学不清楚，有点模糊和不清楚的同学比值加起来为 15.6% 比 G2 实验班高 3.9%，说明数学史融入课堂教学可以帮助学生理清思路，优化理解。

第四题：b 取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

基于第一轮学生问卷反馈分析，对第二轮实验班学生的解题情况也做了相同的分类统计，统计数据如下：

G1 实验班数据统计：

| 解题情况  | 类型  | 人数 |
|-------|-----|----|
| 正确    | I   | 29 |
| 不完全正确 | II  | 4  |
|       | III | 2  |
| 错误    | IV  | 4  |
| 其他    | V   | 6  |

G2 实验班数据统计：

| 解题情况  | 类型  | 人数 |
|-------|-----|----|
| 正确    | I   | 31 |
| 不完全正确 | II  | 4  |
|       | III | 2  |
| 错误    | IV  | 3  |
| 其他    | V   | 3  |

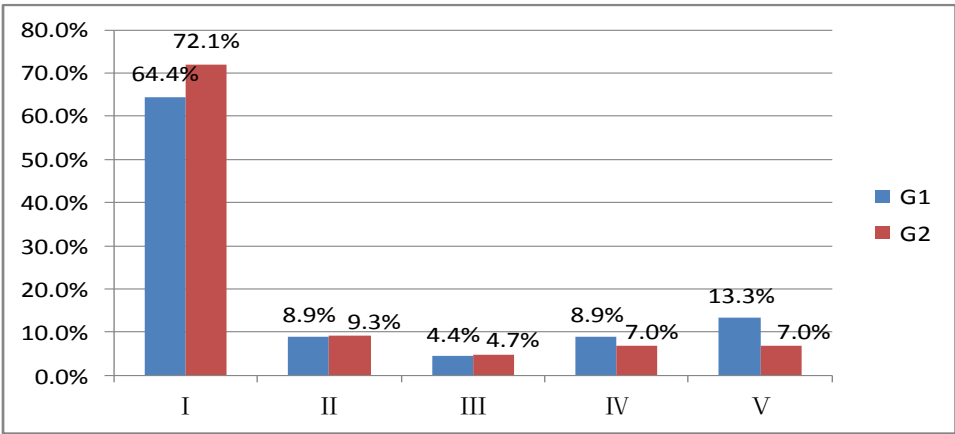


图 4-13 问题 4 数据统计比例图

第四题难度比较低，G1 实验班和 G2 实验班的同学都超过了一半，G2 实验班做正确人数的比值甚至高达 72.1%比 G1 实验班高了 7.7%，G2 实验班同学在教师带领下一一直在体验“用字母表示数”发展的三个阶段，不管是题目的讲解还是教学过程的设计都在引导学生向“符号代数”阶段跨越，G2 实验班仍有 13.3%的同学对“用字母表示数”的认知停留在“缩略代数”阶段，并且 G2 实验班还有 7.0%的同学做错，做错的同学相比 G1 实验班低了 1.9%，虽然学生在不同程度上都有错误出现，但整体来看，G2 实验班对“用字母表示数”的理解更好，这也离不开第一轮教学实施后各位教师的指导。

第五题：(1) $A+B+C=C+A+B$

对      错      不确定      因为\_\_\_\_\_

$$(2)L+M+N= L+P+N$$

对 错 不确定 因为\_\_\_\_\_

$$(3)-A \text{ 是正的}$$

对 错 不确定 因为\_\_\_\_\_

在第一轮学生问卷反馈分析中,将“字母代表一类数理解成了未知数”记作类型 I;将“认为相同的字母代表相同的值”记作类型 II;“正确理解字母表示一类数”记作类型 III;对该题是其他理解的记作类型 IV。第二轮反馈分析和第一轮做了相同的分类统计,统计数据如下:

G1 实验班数据统计:

| 类型 | I | II | III | IV (其他) |
|----|---|----|-----|---------|
| 人数 | 4 | 9  | 28  | 4       |

G2 实验班数据统计:

| 类型 | I | II | III | IV (其他) |
|----|---|----|-----|---------|
| 人数 | 2 | 8  | 29  | 4       |

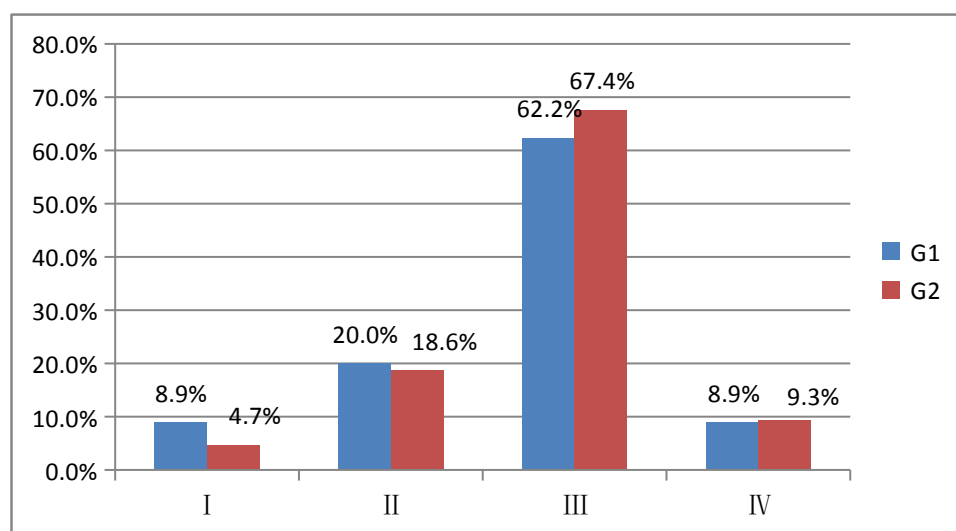


图 4-14 问题 5 数据统计比例图

第五题和第四题相比,难度有所提高,尤其是(2)和(3)还需要分类讨论,学生很难考虑完全,很多同学能够想到对正数和负数的讨论,但容易忽略对“0”的讨论,G2 实验班有 67.4%的同学做正确,G1 实验班有 62.2%的同学做正确,G2 实验班的同学解法和类型 I、类型 II 相似的同学总共有 23.3%,G1 实验班的同学共有 28.9%,G1 实验班对“用字母表示数”理解不准确的比值比 G2 实验班高 5.6%,可以看出,数学史融入“用字母表示数”的课堂教学有助于学生对字母表示“任意数”的理解。

### 4.5.2 教师访谈反馈分析

第二轮课堂实施之后,笔者对对照班的数学老师L和笔者的师傅教师G(两位教师都参与了笔者新授课的听课评课)进行了关于数学史融入“用字母表示数”教学设计以及班级学生反馈情况的访谈。

笔者:对于这节数学史融入“用字母表示数”的这节课您有什么看法?

教师G:这节课比第一节课的课堂效果明显好了很多,学生思考的更多了,课前通过介绍“用字母表示数”的发展史可以激发学生的好奇心,提高学生的探究兴趣。例3是有一定难度的,大部分学生刚开始是不能独立完成的,此时介绍学生的探究结果和数学家相似的环节可以明显感觉到学生的成就感,学习的积极性都很高,作为新教师能够不断摸索,这次的教学设计比上次好很多,继续加油!

分析:优秀课例的开发是计划、行动、反馈、反思不断循环的过程,经过第一轮的教学改进,利用“用字母表示数”的发展史进行引入,学生的探究兴趣得到了提升,例3不仅应用顺应式进行引导,对学生所处的困难还进行分析,使学生再次体会“用字母表示数”的发生发展过程,对“用字母表示数”可以更好的理解,经过对教学设计不断的修改,笔者虽然还没有正式进入工作岗位,但对利用数学史进行教学设计的精髓已基本了解。

笔者:对于新知探究部分,您有什么看法?

教师G:现在中学里面一直在倡导“探究”和“合作”,要求我们老师也要设计一些探究的活动,希望学生可以在在“做中学”更多更好的参与到课堂中,但是对于很多老师来说,自己在学生时代也没有切身体验过探究活动,一般都是教师直接讲解,我们只需要记住就行,这节课的新知探究更多的是让学生自己去发现,教师只是在适当的环节进行引导,改变了以往的灌输式教学,更多的是启发,把课堂还给了学生,教师的角色从灌输着转向了引导着,学生也真正成为了课堂的主人。利用HPM进行教学设计开展探究活动对我们这些教龄大一点的教师来说,其实也是提供了一个很好的机会可以使得我们努力的老师和有天分的老师有了一个平等的机会。

笔者:这节课的教学设计对您今后的教学有什么启发吗?

教师G:看到学生们对数学史的兴趣这么高,我以后也要多查阅与新授课内容相关的资料,把数学史融入教学设计中,昨天你上完课我就在网上查阅了“用字母表示数”的史料,还查阅了利用数学史进行教学的方式,好像是四种,你应用了哪几种?

笔者:应用了附加式、顺应式和重构式。

教师G:最高级的应该是重构式,你接下来可以思考一下如何利用重构式进

行“用字母表示数”的教学设计,或者四种方式全部应用在教学设计上。

笔者:您这个建议非常好,我会努力尝试的,还希望能和您一起探讨。

教师 G:欢迎。

分析:“终身学习”是对每一个教师的要求,也是每一位教师应该做到的,数学史融入“用字母表示数”进行课堂教学的效果已经显现,教师应该把学习数学史知识列入提升自身教学素养的计划中,教师 G 看到了数学史融入课堂的教学效果,并且已经开始查阅资料了解数学史知识了,教师 G 最后提出的建议非常值得笔者思考,这将是笔者接下来努力的方向。

对教师 L 的访谈:

笔者:听完这节课,您有什么感想?

教师 L:我给学生讲这部分内容的时候没有进行数学史知识的融入,也没有按“用字母表示数”这个知识发生发展的顺序进行教学设计,发现学生在用字母表示一类数的时候反应总是不太好,教学效果明显没有你这个数学史融入的课堂反馈好。

笔者:关于新知探究部分的设计您有什么见解呢?

教师 L:你的这个探究设计也是按这个知识的产生顺序设计的,环环相扣,学生每个环节的反应和这个知识产生过程中每个阶段数学家的发现也基本吻合,你的这个设计要好一点。

笔者:对您以后的教学有什么影响吗?

教师 L:看到这节课可以收到这么好的教学效果,不管是学生的探究兴趣还是课后反馈都比我昨天上课的效果要好,我以后要多看一些数学史方面的书籍多阅读相关的文献,开发出更多更好的数学史融入教学的案例。

分析:利用数学史融入“用字母表示数”的顺应式进行教学设计,使教学更贴近学生,从学生的认知出发进行教学,教学环节更连贯,环环相扣帮助学生从“用字母表示数”的认知从“修辞代数”阶段到“缩略代数”阶段,最后到达“符号代数”阶段。教师 L 也表示接下来要查阅数学史资料了解更多的数学史知识,争取开发出优秀的课例。

总结:通过对两位教师的访谈可以看出,第一轮访谈反馈中各位教师提出的建议在第二轮已基本得到改善,两位教师都看到了数学史融入教学的好处,接下来愿意了解更多的数学史知识,并且教师 G 已经开始了对数学史知识的学习。当然,对于教师 L 的建议笔者也会记录下来进行教学设计的再修改,教师 G 也数学史融入课堂教学提出了更高的要求,希望能够尝试利用重构式或者四种方式全部应用上进行教学设计,这也是笔者接下来努力的方向。

### 4.5.3 学生访谈反馈分析

为了了解班级里优生、中等生、后进生对本次课数学史融入课堂教学的感受,在第二轮教学实施后增加了学生访谈,笔者在指导老师的帮助下选了12位同学进行访谈,每个程度的学生回答类似,笔者选取有代表性可以反应笔者研究问题的访谈结果进行分析。

对学生L的访谈:(数学成绩较差)

笔者:在这节课之前,你对数学史有了解吗?

学生L:之前有听到过一点,比如阿基米德的故事。

笔者:这节把数学史知识融入课堂教学的课你喜欢吗?

学生L:挺喜欢的,可以拓宽我们的眼界,感觉不是仅仅为了考试在学习知识。

笔者:能说一下你上完这节课的感受吗?

学生L:以前上数学课我基本听不懂,今天竟然听懂了,也有可能是我以前没有认真听讲,上课总想睡觉,但我今天听课一直很认真。我以前听到的数学史基本上都是数学小故事,不知道还可以利用数学史帮助我们理解,我现在对数学史很有兴趣,我会在网上买一些数学史的书籍课余时间阅读。

笔者:这节课你对哪个问题印象最深?

学生L:“已知两个数的和与差,求这两个数”,刚开始我也没解出来还有点小失落,但是当我发现我遇到的困难大数学家们也遇到过,而且我和他们的想法完全一样时还有点开心呢!

分析:学生L表示,以前接触的数学史知识很少,对数学课也基本没什么兴趣,但由于对数学史知识感兴趣,听课要比以前认真了,当他做题遇到困难进行不下去时发现数学家们也遇到过类似的困难,就不会那么失落,反而会更加努力想证明自己。

对学生Z的访谈:(数学成绩很好)

笔者:对于数学史知识,你以前知道多少?

学生Z:知道一些,基本都是在课外书上看到的,比如:数的演变等。

笔者:你喜欢这节课的教学方式吗?

学生Z:喜欢,虽然我平时也很喜欢数学课,但感觉有数学史的话更有意思一些。

笔者:在课堂上进行数学史的融入,给你的思想上带来了哪些变化?

学生Z:我以前感觉数学史就是作为课外读物了解的,学习一下数学家们的智慧和辛苦,不知道还可以利用数学史进行整个知识点的系统学习,我感受到我



现在遇到的困难其实数学家们当时也遇到过,只是数学家们没有放弃,锲而不舍的攻克了一道道难题,我要学习数学家们这种不放弃、勇往直前的精神,希望我将来也可以成为数学家,为数学的发展贡献自己的力量。

笔者:例3你一开始有想到将两个数的和与差都用字母表示吗?

学生Z:一开始没有,我只想到了将两个数设为“ $x$ ”和“ $y$ ”,和与差都是用文字表示的,虽然结果也正确,但是感觉很奇怪。后来,我又回顾了“用字母表示数”的发展史,想到字母可以表示任意数,就把和与差也用字母表示了出来,感觉舒服多了。

笔者:你很聪明,知道复习回顾老师讲过的内容,看来数学史对你求解这道题是有帮助的。

学生Z:我认为是有帮助的。

分析:学生Z的数学成绩在班里一直是名列前茅的,但表示自己对数学史的了解还是很少,听完数学家探索“用字母表示数”的过程,表示自己要像数学家学习,希望以后也能够当一名数学家为数学的发展做贡献,学生Z也提到在解最后一道例题时通过回忆“用字母表示数”的发展史帮助自己得到了最终答案。

对学生J的访谈:(数学成绩中等)

笔者:你能复述“用字母表示数”的发展史吗?

学生J:应该差不多,先是“修辞代数”阶段没有字母出现,然后是“缩略代数”阶段字母“ $r$ ”只能代表圆的半径,最后是“符号代数”阶段字母可以表示任意数。

笔者:回答得非常好,你认为你对“用字母表示数”的理解在哪个阶段?

学生J:我知道字母可以表示任意数,但做题不是很熟练。

笔者:最后一道例题你理解了吗?

学生J:刚开始没有做出了,但现在理解了。

笔者:你喜欢数学史融入课堂吗?

学生J:挺喜欢的。

笔者:为什么会喜欢?

学生J:感觉挺有意思的,数学课不再是只单单讲数学知识,还可以了解数学知识是怎么来的,很佩服数学家们的坚持,我平时做题,稍微有点难就想放弃了,我也要像数学家们一样要坚持不懈、要自信。

笔者:在接下来的教学中,你对数学老师或者数学课有什么期待?

学生J:我希望数学课可以不要像以前那样枯燥,可以适当的给我们讲些数学史知识,数学史也可以帮助我们理解数学知识,所以在接下来的数学课上,我希望老师能够多按这种教学方式来进行数学教学,我还希望数学老师能够推荐更多

有趣的数学史读物,我想我会很有兴趣去阅读,这样既可以丰富我的见识也可以提高我对数学学习的兴趣。

分析:学生J提出希望教师可以推荐一些数学史的书,说明学生对数学史很感兴趣,并且愿意主动学习,对拓展题例3也能够完全理解,只要学生愿意学、想学,成绩提高是指日可待的。

总结:从以上访谈可以看出,没有学生认为数学史是多余的,都有谈到自己一开始没想起来字母表示数的某种意义,是通过回忆“用字母表示数”的发展史想起来的,间接说明数学史是可以帮助学生理解数学知识的。

#### 4.5.4 课堂实录反馈分析

##### 一、情景引入

师:在小学五年级的时候我们学习过“用字母表示数”,谁能说一下小学学习了“用字母表示数”的哪些内容?

生1:字母可以表示运算律。

生2:长方形、正方形的面积、周长公式。

师:谁还要补充?

生3:圆面积公式。

师:今天我们继续来学习《“用字母表示数”》,看看和小学学的有什么不同。

大家感觉“用字母表示数”难不难?

生:不难!/还可以吧!/有点难!

师:大家不要小瞧“用字母表示数”在历史上,数学家们探索它,足足花了几个世纪。大家想了解它的发展史吗?

生(齐声):想。

师:虽然“用字母表示数”的发展过程在历史上经历了漫长的时光,但关键的跨越性阶段主要有3个,历史上称之为“修辞代数”阶段、“缩略代数”阶段、“符号代数”阶段,通俗的讲,“修辞代数”就是解题时没有字母出现,全部用文字叙述,相当于我们今天的用算术方法解题,“缩略代数”就是每个字母都有特定的意义,比如字母“S”只能代表“面积”,字母“C”只能表示“周长”,这样就导致不能找到通用的解题方法,就有人开玩笑说“用丢番图的方法解方程,解了100道可能还是不知道第101道的方法。”不要小看这一发现,从修辞代数跨越到缩略代数经历了大约两千年的时间呢!“符号代数”是字母表示数的最高阶段,此时字母可以表示任意的数,为我们的解题带来了很大的方便。

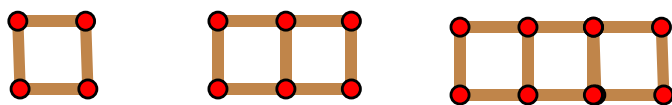
生（低声道）：真不容易！

师：在我们看来理所当然的一个知识，都是数学家们经过上千年的探索得出来的，所以我们应该珍惜每一个知识的来之不易。

分析：从回忆学生小学学过的“用字母表示数”进行引入，经过教师的追问，学生慢慢进入了状态，清楚了本节课的学习内容，再讲解“用字母表示数”的发展史，学生有了更深的感受。

## 二、新知探究

例1：如图所示，用小棒围成的1个正方形、2个正方形组成的长方形、3个正方形组成的长方形，按照这样的排列，5个正方形组成的长方形需要几根小棒？7个呢？你是怎么得出结果的？



生1：16个和22个，我是画出来的。

生2：我和生1答案一样，我发现相邻图形的两个小棒数相差3。

生3：我也是16个和22个，我发现个数个小棒数之间有关系，小棒数等于个数的3倍加1，如果把个数记作 $n$ ，小棒数就是 $3n+1$ 。

师：这3种方法，大家觉得哪一种更好？

生（齐声）：第三种

师：为什么觉得第三种好？

生1：第三种将序号和需要的小棒数之间的规律用公式表示了出来，这样不管问第几个，只要将序号代入公式就可以了！

师：第二个也找到了规律呀！

生2：但是没有用字母表示，看起来很麻烦。

师：在“用字母表示数”发展的第一个阶段——“修辞代数”阶段，人们想到的都是第二种方法，虽然也能找到规律，但是只能根据问题说出具体的一个答案，没办法表示任意一个；而第三种方法相对来说就方便很多，这也是“用字母表示数”给我们带来的便利。

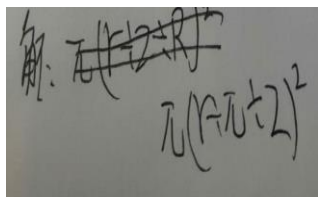
生3：那我们的方法应该对应哪个阶段？

师：等学习完这节课的内容你们就知道了？

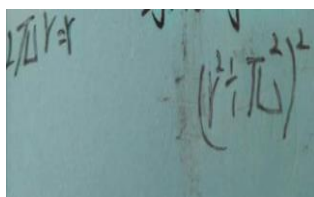
分析：通过展示学生三种具有代表性的解题过程，让学生自己感受哪种方法最好并分析原因，学生一致认为用字母表示的方法最清楚方便，在教师说出用文字表达规律的同学认知处于第一个阶段时，用字母表示的同学就按耐不住了，急于知道自己处于哪个阶段，教师没有直接告诉，而是选择了留下悬念，可以激发

学生的探究兴趣，引起学生思考。

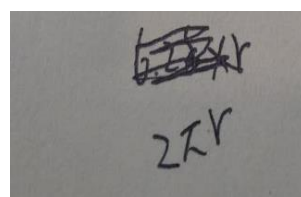
例2：已知圆的周长为 $r$ ，求圆的半径。（ppt出示）



(I)



(II)



(III)

生4：老师，你写错了吧！字母“ $r$ ”应该表示的是圆的半径。

生5：我也感觉。

师：其他同学怎么看？

生3：好像也没有规定字母“ $r$ ”只能表示圆的半径吧。

师：看来同学们的意见不统一呀！那小组之间讨论一下，看看你们支持哪位同学的观点。

（同学们开始了激烈的讨论）

生5：老师我明白了，字母“ $r$ ”只是一个表示符号，在这道题中就表示的圆的周长。

师：大家同意吗？

生（齐声）：同意。

师：把字母“ $r$ ”换成其他的字母可以吗？

生（齐声）：可以。

师：历史上数学家们在解题时也发现了用丢番图方法解题的弊端，经过数学家们坚持不懈的努力，终于在16世纪，法国数学家韦达探索出字母只是一个符号，不应该有特定的意义，这样字母就可以表示一类数了，而不是特定的未知数，所以我们这道题目是没有问题的。

分析：学生的反应与第一轮研究中实验班级的同学反应一样，有些同学认为字母“ $r$ ”表示圆的半径是不正确的，说明两个班学生的水平相当，都会有思路不清楚的学生，学生能够提出这样的质疑，也说明学生在认真思考，告诉提出质疑的学生他们的想法和数学家丢番图一样，让学生明白数学家也是和我们一样的人，只不过比我们勤奋好学，以此鼓励学生要对自己有信心，只要脚踏实地一步一个脚印，肯定可以学好数学。

例3：已知两个数的和与差，求这两个数。

分析：小组讨论后学生的汇报答案中，有不知道如何表示和与差的；有将与差用文字表示的；有代特殊值的，每一种答案在“用字母表示数”的历史发展过程中都有相对应的阶段，借机向学生介绍他们的想法在历史上数学家们也有同

样的想法时,学生都非常开心,表情中透露着他们为何数学家有一样的想法而感到骄傲。在将学生的想法和“用字母表示数”的发展阶段相对应时,学生都想起了可以用字母表示任意数,顺利的得到了答案。

### 三、巩固练习

练习1: 设某数为 $x$  ( $x \neq 0$ ), 用 $x$ 表示下列各数。(ppt 出示)

- (1) 比某数的一半多2的数。
- (2) 某数减去5的差与10的积。
- (3) 某数与12的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的4倍除以某数的商。

练习2: 运动会期间, 学校买了26个篮球, 每个篮球 $r$ 元; 买了 $z$ 个足球, 每个足球32元, 代数式 $26r+32z$ 代表什么意思?

分析: 练习1既可以帮助学生巩固新知, 也可以为接下来学生学习代数式奠定基础。学生在解题时会出现将数字和字母 $x$ 之间用“ $\times$ ”连接的现象, 这时可以插入一段关于“ $\times$ ”在乘法算式里的小故事, 帮助学生较好的理解为什么在乘法算式里“ $\times$ ”可以省略, 同时感悟数学的科学严谨, 体会每一种规定都是有它的历史原因的。

教学要求学生不仅能够根据题目写出代数式还要能够理解代数式的意义, 练习1和练习2相辅相成, 不可或缺。

### 四、课堂小结

师: 谁来总结一下我们今天的学习内容?

生3: 了解了“用字母表示数”的历史, 知道了数学家们的不容易, 我们应该学习数学家们坚持不懈、勇于探索的精神!

师: 你说的都是“用字母表示数”的数学史知识, 除了数学史, 还学习了什么?

生4: “用字母表示数”在解题时的方便, 字母不仅可以表示未知数, 还可以表示已知数。

师: 谁再总结一下生4的回答, 字母可以表示什么数?

生5: 任意数。

分析: 课堂小结是非常有必要的, 可以帮助学生理清思路, 对课堂内容有一个清晰的认识, 一定程度上也可以把上课思想偶尔“开小差”的同学缺失的重要内容补救上。

## 第5章 结论与启示

### 5.1 融入数学史的教学设计对学生的影响

促进学生的理解和认知。数学史不仅包含有具体的数学知识,还体现着数学知识的发生发展过程,根据教学的实际情况将数学史融入数学课堂教学,可以培养学生良好的数学能力帮助学生理解,使得学生可以利用数学史这样一个新的视角巧学数学,不仅知道数学知识的源与流,还能知道数学家的思维过程,沿着数学家发现数学知识的思路,可以拓宽学生的数学视野,培养学生的数学能力,促进学生的深度理解。

增加学生学习数学的自信心。数学史可以让学生了解到数学知识的发生发展并不是一帆风顺的,数学家们在解题的过程中也会出错并且也会出现不会解的情况,但他们没有放弃靠着自己对数学的热爱和坚持不懈的努力慢慢研究出解决数学题目的巧妙之处,为我们今天的数学学习奠定了很好的基础。数学家们在科研道路上的这种坎坷经历可以鼓励学生不要轻易放弃,只要踏踏实实一步一个脚印勇于探索一定可以学好数学,数学家们对于数学的一点点新发现可以鼓励学生要勇于创新敢于试错,激发学生的数学学习斗志,增加学生的数学学习自信心。

激发学生的数学学习热情。在调查问卷的结果显示中也可以看到学生对数学史很感兴趣,单独的数学知识学生会感觉枯燥无味,尤其是基础不好的学生更是对其提不上兴趣,数学史不仅是讲述数学知识的发生发展过程里面还蕴含着丰富的数学知识,融入数学史的课堂教学学生会感觉没有那么晦涩难懂,当学生了解到自己在解题的过程中和数学家们遇到了相似的困境后反而会激发他们继续探究的热情。

提高学生的数学核心素养。当代教学一直在强调提高学生的数学核心素养,但是很多教师都不知道该如何提高,借用什么辅助资料来提高,数学史就是一个很好的辅助材料。从数学史的视角进行数学学习,学到的不仅是数学知识更重要的是还可以学到宝贵的数学思想方法,利用数学史开展数学课堂探究活动,培养了学生的新思维和创新能力,伴随着数学知识的发生发展过程学习新知识,学生的基础知识、基本技能、基本思想以及基本的活动经验都可以得到提高,进而可以提高学生的数学核心素养。

## 5.2 教学启示

新课程理念下,要求教师课堂教学应以学生为中心,教学设计要更加突出学生的主体地位,教学过程应遵循学生内在的发展规律,发挥教师在教学过程中组织者、引导者、合作者的作用,激发学生自主探究、合作学习的意识和兴趣。教师在教学中根据“用字母表示数”历史发展的三个阶段有目的、有顺序地展示学生的课堂练习,其意义在于让学生经历“用字母表示数”的历史发展过程,使其在学生心里的发生发展顺序同历史发生发展顺序相一致,教学中教师能够不露痕迹地巧妙利用史料对教师的教学功底提出了更高的要求。

培养学生的数学核心素养也包括对学生进行数学思想和数学方法的传递,而数学思想和方法是在教学概念的产生和形成以及发展进程中总结归纳出来的。在HPM视角的数学教学中,我们应注重对隐藏在数学概念中的数学思想方法进行挖掘,向学生渗透这些数学思想方法,所以不能把数学概念看作是一个个孤立的知识点,应该要把它们串联起来,放在整个数学历史发展的进程中理解领悟。这些概念处在什么样的位置、有着什么样的作用、能够体现什么样的数学思想、应用什么样的方法讲解、蕴含什么样的理论知识,这些都是教师在教学中需要关注的内容,所以在实际的教学过程中,我们教师应了解数学概念、数学理论、数学问题的产生和发展的全过程,探讨概念背后的数学思想以及数学家历经的思路方法,只有真正融入到数学概念的历史发展中,才能对数学概念有本质的理解和体会,才可以透过现象看到本质。

## 参考文献

- [1] Herscovics N. Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra[J]. Research Issues in the Learning & Teaching of Algebra, 1989:60-86.
- [2] Sierpinska A. Understanding in mathematics[J]. Falmer Press, 1983, 10(3):1742 - 1744.
- [3] 陈静安, 黄启亮, 凡加云,等. 中学生对“字母表示数”认知发展的历史相似性研究[J]. 广东第二师范学院学报, 2016, 36(3):90-95.
- [4] 蒲淑萍, 汪晓勤. 学生对字母的理解:历史相似性研究[J]. 数学教育学报, 2012(3):38-41.
- [5] 教育部. 全日制义务教育数学课程标准[M]. 北京师范大学出版社, 2001.
- [6] 蔡宏圣. 和谐:小学数学教学设计的新视角——以“用字母表示数”的教学设计为例[J]. 课程.教材.教法, 2007(8):37-41.
- [7] 孙洲. HPM 视角下的“字母表示数”教学[J]. 数学教学, 2017(6):28-30.
- [8] 张红. HPM 融入高中导数教学的行动研究[D].华东师范大学, 2017.
- [9] 汪晓勤, 欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报, 2003, 12(3):24-27.
- [10] 张小明. 中学数学教学中融入数学史的行动研究[D]. 华东师范大学, 2006.
- [11] 汪晓勤. HPM 视角下的“角平分线”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014(5):29-32.
- [12] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2):1-5.
- [13] 李玲. 数学史融入数列教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2016.
- [14] Freudenthal H. Major problems of mathematics education[J]. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12(2):133-150.
- [15] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 科学出版社, 2002.
- [16] 刘爱东. “用字母表示数”的历史演进及其数学价值[J]. 小学教学(数学版), 2017(12):52-54.
- [17] Fauvel, J.&Gray, J. The History of Mathematics: A Reader [M]. Hampshire: Macmillan Education. 1987.
- [18] Nicomachus. Introduction to Arithmetic. In: R. M. Hutchins (ed.), Great Books of the Western World (11) [M].Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1982: 811-848.
- [19] 汪晓勤,樊校. “用字母表示数”的历史[J].数学教学, 2011(9): 24-27.
- [20] 李文林. 数学史概论-第2版[M]. 高等教育出版社, 2002.
- [21] 蔡宏圣. 捕捉数学史中的教育基因——以“字母表示数”的教学为例[J]. 人民教育, 2008(6):38-40.
- [22] 陈静安,黄启亮,凡加云,邬鸿钦. 中学生对“字母表示数”认知发展的历史相似性研究. 广东第二师范学院学报[J].2016,36(03),90-95.
- [23] 孙兴华. 基于“三教”理念的儿童数学核心素养培育策略——吴正宪“字母表示数”课例探析.兴义民族师范学院学报[J].2016,(3),104-108.
- [24] 陶红强. 基于学生发展的课堂教学研究:知识·思维·思想——以《“用字母表示数”》为例.教育科学论坛[J].2015,(15),56-58.
- [25] 陶小妹. 转变思维方式提升课堂品质——“用字母表示数”教学设计与创新思考.科教



- 文汇(上旬刊)[J].2018,(05)113-114.
- [26] 徐艳. 新课标背景下的课堂教学实践与思考——以《“用字母表示数”》的教学为例[J]. 科教文汇(中旬刊), 2013(12):178-178.
- [27] 鞠文玲. 揭开“热闹”面纱 关注能力培养——“用字母表示数”教学案例及其思考[J]. 现代中小学教育, 2012(01):38-40.
- [28] 吴梅香, 徐斌. 巧玩扑克牌激活抽象数学模型建构的情趣——苏教版数学教材四年级下册《“用字母表示数”》教学实录及赏析[J]. 教育科学论坛, 2010(6):35-38.
- [29] 万兆荣. 展示建模过程 建立符号意识——关于“用字母表示数”的教学思考[J]. 教学与管理, 2014(11):40-42.
- [30] 付秋萍, 刘洪斌. 在代数模型建构中培养符号意识——西师版《“用字母表示数”》教学实录与导引[J]. 教育科学论坛, 2012(8):37-40.
- [31] 钱燕飞, 郑大明. 巧用生活素材展现数学模型的能动建构——北师大版新课程标准教材四年级下册《字母表示数》课堂教学纪实[J]. 教育科学论坛, 2006(8):26-31.
- [32] 闫炳霞. 学生符号感的培养--从“字母表示数”说起[J]. 成都师范学院学报, 2005, 21(12):17-18.
- [33] 吴雅萍. 基于变构学习模型的小学数学“用字母表示数”教学设计研究[D]. 扬州大学, 2017.
- [34] 杨朝龙. 七年级学生“字母表示数”意识的调查与研究[D]. 河北师范大学, 2017.
- [35] 刘晓艺. 5-7 年级学生“用字母表示数”的理解水平的调查研究[D]. 东北师范大学, 2015.
- [36] 张莎莎. 七年级用“字母表示数”的有效教学探究[D]. 新疆师范大学, 2016.
- [37] 谢煜琨. 初中生对字母表示数的理解[D]. 华东师范大学, 2014.
- [38] 冯妙. 彝、藏、汉族初中生字母表示数认知水平的比较研究[D]. 四川师范大学, 2016.
- [39] Collis K F. A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: A Piagetian Viewpoint.[J]. Mathematical Gazette, 1975, 60(411):72.
- [40] Küchemann D. Cognitive demand of secondary school mathematics items[J]. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12(3):301-316.
- [41] Ursini, S. & Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. In E. Pehkonen (Ed.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2). Finland: University of Helsinki. 161-168.
- [42] 王芳. 数学史融入导数教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2012.
- [43] 田方琳. 数学史融入对数概念教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2015.
- [44] 钟萍. 数学史融入高中代数概念教学的行动研究——以“函数”、“对数”为例[D]. 华东师范大学, 2017.
- [45] 沈中宇. 数学史融入立体几何教学的行动研究——以直线、平面为例[D]. 华东师范大学, 2017.
- [46] 蒲淑萍. HPM 与数学教师专业发展——以一个数学教育工作室为例[D]. 华东师范大学, 2013.
- [47] 翟阳琴. 将数学史融入高中数学课堂——以“等差数列的前  $n$  项和(1)”为例[J]. 数学教学通讯, 2018, 670(33):20-21+43.
- [48] 孙雨琴, 朱哲. 用叠加模式将数学史融入数学教学——以“导数的几何意义”为例[J]. 中学数学杂志, 2018(9).

- [49] 洪燕君, 李霞, 常道宽. 数学史融入“加减消元法”的课堂教学[J]. 数学教学, 2017(1):39-42.
- [50] 高一刚. 数学史“重构式”融入小学数学教学的研究——以“认识厘米”为例[J]. 数学学习与研究: 教研版, 2017.
- [51] 杨懿荔. HPM 视角下解析几何的教学——以直线方程、曲线与方程为例[D]. 华东师范大学, 2017.
- [52] 杨鑫. 数学史在高中概率统计教学中的应用探究[D]. 华中师范大学, 2017.
- [53] 张俊忠. 数学史融入初中数学教育的研究[D]. 华中师范大学, 2015.
- [54] Arnason K, McDonald J J, Maeers M, et al. Interweaving Mathematics and Indigenous Cultures.[J]. 2001, 2001(1):6.
- [55] Fauvel J, Maanen J V. The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997–2000)[J]. Educational Studies in Mathematics, 1997, 26(3):10-11.
- [56] Arcavi A, Ben-Zvi B R. Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics[J]. For the Learning of Mathematics, 1982, 3(1):30-37.
- [57] 郑金洲. 中国教育理论研究的世纪走向[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 2003, 21(2):2-10

## 附录 A 测试卷一

要求：请用水笔或钢笔答题，你的所有答题信息都将被严格保密，所以请你放心认真答题。

1. 你对课上介绍的数学史知识感兴趣吗？

A.非常感兴趣    B.感兴趣    C.一般般    D.不感兴趣    E.完全不感兴趣

2. 你以前对数学史知识了解的多吗？

A.非常了解    B.了解    C.一般般    D.不太了解    D.完全不了解

3. 在数学课堂中融入数学史的教学方式你认可吗？

A.非常认可    B.认可    C.不讨厌    D.不认可    E.完全不认可

4. 学完这节课，你认为“用字母表示数”在生活中有用吗？

A.非常有用    B.有用    C.没有用    D.不清楚

5. 通过这节课的学习，你理解用字母可以表示任意数了吗？

A.非常理解    B.理解    C.有点模糊    D.不理解

6. 你能清晰描述解已知两个数的和与差，求这两个数的过程吗？

A.非常清晰    B.清晰    C.有点模糊    D.不清楚

7.  $b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

8. 下列哪些是对的，哪些是错的，哪些是不确定的？请圈出正确的结论，并说明原因：

(1)  $A+B+C=C+A+B$

对    错    不确定

因为\_\_\_\_\_

(2)  $L+M+N=L+P+N$

对    错    不确定

因为\_\_\_\_\_

(3)  $-A$  是正的

对    错    不确定

因为\_\_\_\_\_

说明：第 1、2、3 题只有第一轮实验班学生做，其余题目参与研究的学生都做。

## 附录 B 测试卷二

要求：请用水笔或钢笔答题，你的所有答题信息都将被严格保密，所以请你放心认真答题。

1. 学完这节课，你认为“用字母表示数”在生活中有用吗？

A.非常有用      B.有用      C.没有用      D.不清楚

2. 通过这节课的学习，你理解用字母可以表示任意数了吗？

A.非常理解      B.理解      C.有点模糊      D.不理解

3. 你能清晰描述解已知两个数的和与差，求这两个数的过程吗？

A.非常清晰      B.清晰      C.有点模糊      D.不清楚

4.  $b$  取何值时  $b+2$  比  $b$  的 2 倍大 1？

5. 下列哪些是对的，哪些是错的，哪些是不确定的？请圈出正确的结论，并说明原因：

(1)  $A+B+C=C+A+B$

对      错      不确定

因为\_\_\_\_\_

(2)  $L+M+N=L+P+N$

对      错      不确定

因为\_\_\_\_\_

(3)  $-A$  是正的

对      错      不确定

因为\_\_\_\_\_

## 附录 C 第一轮研究课堂实录

### 一、情境引入

师：马上就到猪年了，我们来做一个和小猪有关的游戏！游戏规则：第一个同学说“一只小猪 4 条腿，两只小猪几条腿？”，第二个同学接着说“两只小猪 8 条腿，三只小猪几条腿？”，第三个，第四个就这样接着说，跟不上节奏的淘汰出局。

（同学们兴致勃勃地说了起来）

师：能说完吗？

生（齐声）：不能。

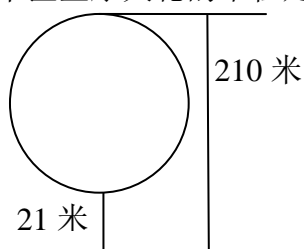
师：有没有什么方法概括一下？

生（齐声）：“用字母表示数”（板书课题）

师：“用字母表示数”的发展过程在历史上经历了漫长的时光，但关键的跨越性阶段主要有 3 个，历史上称之为“修辞代数”阶段、“缩略代数”阶段、“符号代数”阶段，我们今天就根据这 3 个重要阶段一起来学习“用字母表示数”。

### 二、新知研究

例 1：有“亚洲第一”之称的长沙摩天轮于 2004 年 9 月 30 日建成，当你 10 月 1 日对外开放，是亚洲第一、世界第二的摩天轮。长沙摩天轮最令人称奇之处在于它立在巨型屋顶上，据专家介绍，将摩天轮建在屋顶上在世界上都是独一无二的。如果摩天轮垂直于地面时，最高点离地面 120 米，最低点离地面 21 米，那么这个巨型摩天轮的半径是多少？



师：请同学们拿出课前给你们发的 A4 纸，将例 1 的解题过程写下来！

师：我们一起来看一下这两位同学的解题过程。（投影）

$$\begin{aligned} \text{解: } & (120-21) \div 2 \\ &= 99 \div 2 \\ &= 49.5 (\text{m}) \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} \text{解: 设半径为 } x. \\ 2x &= 120-21 \\ 2x &= 99 \\ x &= 49.5 \end{aligned}$$

(II)

师：老师课前向大家介绍了“用字母表示数”发展的 3 个阶段，大部分学生都是用方法（I）求解的，如果只想到了这一种方法，说明在想法上和数学家花拉子米非常相似，都没有想到用字母表示未知数，用方法（II）求解的同学想到了可以用字母来表示未知数，说明思维已经向“用字母表示数”的第二个阶段跨越了。自己想想看你理解到了哪一个阶段。

师：请同学们完成例 2。

例 2：已知圆的周长为  $r$ ，求圆的面积。（ppt 出示）

$$\pi(r-2)^2$$

(III)

$$\left(\frac{r}{2\pi}\right)^2$$

(IV)

$$2\pi r$$

(V)

生 1：老师，你写错了吧！字母“ $r$ ”应该表示的是圆的半径。

生 2：我也感觉。

师：其他同学怎么看？

生 3：好像也没有规定字母“ $r$ ”只能表示圆的半径吧。

师：看来同学们的意见不统一呀！那小组之间讨论一下，看看你们支持哪位同学的观点。

（同学们开始了激烈的讨论）

生 1：老师我明白了，字母“ $r$ ”只是一个表示符号，在这道题中就表示的圆的周长。

师：大家同意吗？

生（齐声）：同意。

师：把字母“ $r$ ”换成其他的字母可以吗？

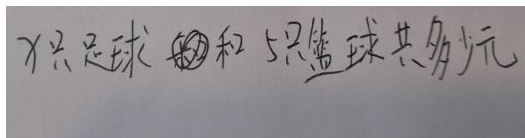
生（齐声）：可以。

师：历史上数学家们在解题时也发现了用丢番图方法解题的弊端，经过数学家们坚持不懈的努力，终于在 16 世纪，法国数学家韦达探索出字母只是一个符号，不应该有特定的意义，这样字母就可以表示一类数了，而不是特定的未知数，

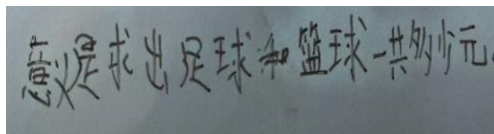
所以我们这道题目是没有问题的。

例 3: 运动会期间, 学校买了 26 个篮球, 每个篮球  $r$  元; 买了  $z$  个足球, 每个足球 32 元, 代数式  $26r+32z$  代表什么意思? (ppt 出示)

师: 请同学们继续完成例 3。



(VI)



(VII)

在巡视过程中, 除了四个同学没有写之外, 都能够写出  $26r+32z$  表示篮球和足球总共多少元。

师: 生 4 能说一下你为什么没有写吗?

生 4: 我感觉这道题有问题, 前面用字母表示篮球的钱数, 后面字母却表示足球的个数, 前后不统一。

师: 谁来解答一下生 4 的疑惑?

生 5: 字母可以表示任意的数, 题目中两个字母不一样, 所以可以表示不同的意义。

师: 生 4 你理解生 5 的意思了吗?

生 4: 理解了。

师: 通过例 2 的探究, 同学们例 3 的正确率非常高, 我们通过一节 40 分钟的课就学习完了数学家几个世纪探索出来的东西, 是不是感觉自己特别厉害!

生 1: 我们是在老师的引导下学习的, 所以比较快, 数学家们全靠自己的摸索, 所以我还是很佩服数学家们的。

师: 说的非常好! 我们今天学习的知识都是数学家们通过坚持不懈的努力探索出来的, 所以, 我们不仅要尊敬这些数学家更要尊重这些来之不易的知识, 遇到问题不退缩, 勇于探究, 说不定下一个数学家就是你们其中的一个!

学生都露出了满意的微笑。

例 4: 已知两个数的和与差, 求这两个数。

师: 经过我们前面的学习, 相信同学们对“用字母表示数”都有了清晰的认识, 现在请同学们将例 4 先自己写在练习本上, 稍后根据大家完成的情况进行讲解。

师: 我在巡视的过程中发现有 3 中典型的解题方法, 我们一起来看一下(投影)。

4. 已知两个数的和与差, 求两个数.  
解: 设  

$$\begin{aligned} x + (\text{和} - x) &= \text{差} \\ x + \text{和} + x &= \text{差} \\ 2x &= \text{差} - \text{和} \\ \text{和} &= \frac{\text{差} - \text{和}}{2} \\ 2x &= \text{差} - \frac{\text{差} - \text{和}}{2} \\ x &= \frac{(\text{差} + \text{和})}{2} \end{aligned}$$
 另一个数:  

$$\begin{aligned} \text{和} - (\text{和} - \text{差}) / 2 &= \frac{2\text{和} - \text{和} + \text{差}}{2} \\ &= \frac{\text{和} + \text{差}}{2} \end{aligned}$$

问: 这里的字母表示?

生(齐声): 未知数。

师: 在解题过程中出现的和与差文字大家感觉舒服吗? 有没有什么好的方法表示?

生(大约一半): 可以用字母表示。

师: 我们来看下这位同学的。

解: 设这两个数分别为 $x$ 和 $y$ , 它们的和为 $a$ , 差为 $b$ .  

$$\begin{cases} x + y = a \text{ ①} \\ x - y = b \text{ ②} \end{cases}$$
 ① + ②得  

$$2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$
 ① - ②得  

$$2y = a - b$$

$$y = \frac{a - b}{2}$$
 所以这两个数分别为  $\frac{a+b}{2}$  和  $\frac{a-b}{2}$

问: 你们是这样想的吗?

生(激动): 是的, 是的。

师: 同学们的悟性都真高, 这道题目中的字母都表示哪些数?

生 5: 未知数和已知数。

师: 大家都明白了吗?

生(齐声): 明白了!

师: 那李老师就要考考大家了, 看大家是否真的掌握了, 请同学们完成任务单上的练习题。

### 三、巩固练习

练习 1: 设某数为 $x$  ( $x \neq 0$ ), 用 $x$ 表示下列各数。(任务单课前已发)

- (1) 比某数的一半多 2 的数。
- (2) 某数减去 5 的差与 10 的积。
- (3) 某数与 12 的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的 4 倍除以某数的商。

师: 先独立完成, 然后同桌核对, 有问题的同桌之间交流一下想法。



师：有没有不一样的？

生 6：生 7 的第 4 题数字和字母之间没写乘号。

师：你观察的真仔细！其实这里的乘号可以省略不写，关于这个规定还有一段小故事呢！“德国数学家莱布尼茨认为乘号“ $\times$ ”容易与字母“ $x$ ”相混淆，建议用“ $\bullet$ ”表示乘号；如果有数，数要写在字母的前面。这样，用“ $\bullet$ ”标志乘号得到了广泛的承认。如今，欧洲大陆派（德、法等国）规定以“ $\bullet$ ”作乘号。其他国家则以“ $\times$ ”作乘号，“ $\bullet$ ”为小数点。而我国则规定以“ $\times$ ”或“ $\bullet$ ”作乘号都可，一般用于字母或括号前的乘号可略去<sup>[19]</sup>。”

师：现在你明白生 9 为什么可以将乘号省略了吧？

生 6：明白了！

#### 四、课堂小结

师：哪位同学总结一下我们今天学习的内容？

生 2：我们知道了“用字母表示数”的发展历史，了解了数学家们探索新知识的不易；我们遇到问题不应该退缩，要像数学家们一样勇往直前。

师：非常好！要学习数学家们的精神！还有没有要补充的？

生 3：我们还学习了在解应用题时如果用算术方法比较繁琐要想到用方程的方法求解；还学习了字母只是一个符号不应该有特定的意义，比如字母“ $r$ ”就不是只能表示圆的半径，圆的周长、正方形的边长等都可以用字母“ $r$ ”表示。

师：回答得非常完整！

## 附录D 第二轮研究课堂实录

### 一、情境引入

师：在小学五年级的时候我们学习过“用字母表示数”，谁能说一下小学学习了“用字母表示数”的哪些内容？

生1：字母可以表示运算律。

生2：长方形、正方形的面积、周长公式。

师：谁还要补充？

生3：圆面积公式。

师：今天我们继续来学习《用字母表示数》，看看和小学学的有什么不同。

大家感觉“用字母表示数”难不难？

生：不难！/还可以吧！/有点难！

师：大家不要小瞧“用字母表示数”在历史上，数学家们探索它，足足花了几百个世纪。大家想了解它的发展史吗？

生（齐声）：想。

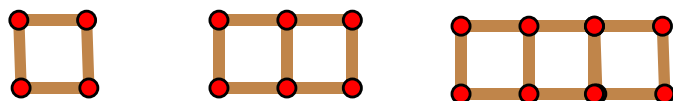
师：虽然“用字母表示数”的发展过程在历史上经历了漫长的时光，但关键的跨越性阶段主要有3个，历史上称之为“修辞代数”阶段、“缩略代数”阶段、“符号代数”阶段，通俗的讲，“修辞代数”就是解题时没有字母出现，全部用文字叙述，相当于我们今天的用算术方法解题，“缩略代数”就是每个字母都有特定的意义，比如字母“S”只能代表“面积”，字母“C”只能表示“周长”，这样就导致不能找到通用的解题方法，就有人开玩笑说“用丢番图的方法解方程，解了100道可能还是不知道第101道的方法。”不要小看这一发现，从修辞代数跨越到缩略代数经历了大约两千年的时间呢！“符号代数”是字母表示数的最高阶段，此时字母可以表示任意的数，为我们的解题带来了很大的方便。

生（低声道）：真不容易！

师：在我们看来理所当然的一个知识，都是数学家们经过上千年的探索得出来的，所以我们应该珍惜每一个知识的来之不易。

### 二、新知探究

例1：如图所示，用小棒围成的1个正方形、2个正方形组成的长方形、3个正方形组成的长方形，按照这样的排列，5个正方形组成的长方形需要几根小棒？7个呢？你是怎么得出结果的？



生 1: 16 个和 22 个, 我是画出来的。

生 2: 我和生 1 答案一样, 我发现相邻图形的两个小棒数相差 3。

生 3: 我也是 16 个和 22 个, 我发现个数个小棒数之间有关系, 小棒数等于个数的 3 倍加 1, 如果把个数记作  $n$ , 小棒数就是  $3n+1$ 。

师: 这 3 种方法, 大家觉得哪一种更好?

生 (齐声): 第三种

师: 为什么觉得第三种好?

生 1: 第三种将序号和需要的小棒数之间的规律用公式表示了出来, 这样不管问第几个, 只要将序号代入公式就可以了!

师: 第二个也找到了规律呀!

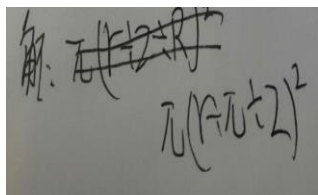
生 2: 但是没有用字母表示, 看起来很麻烦。

师: 在“用字母表示数”发展的第一个阶段---“修辞代数”阶段, 人们想到的都是第二种方法, 虽然也能找到规律, 但是只能根据问题说出具体的一个答案, 没办法表示任意一个; 而第三种方法相对来说就方便很多, 这也是“用字母表示数”给我们带来的便利。

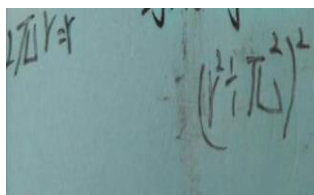
生 3: 那我们的方法应该对应哪个阶段?

师: 等学习完这节课的内容你们就知道了?

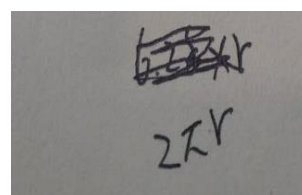
例 2: 已知圆的周长为  $r$ , 求圆的半径。(ppt 出示)



(III)



(IV)



(V)

生 4: 老师, 你写错了吧! 字母“ $r$ ”应该表示的是圆的半径。

生 5: 我也感觉。

师: 其他同学怎么看?

生 3: 好像也没有规定字母“ $r$ ”只能表示圆的半径吧。

师: 看来同学们的意见不统一呀! 那小组之间讨论一下, 看看你们支持哪位同学的观点。

(同学们开始了激烈的讨论)

生 5: 老师我明白了, 字母“ $r$ ”只是一个表示符号, 在这道题中就表示的圆的周长。

师: 大家同意吗?

生 (齐声): 同意。

师：把字母“r”换成其他的字母可以吗？

生（齐声）：可以。

师：历史上数学家们在解题时也发现了用丢番图方法解题的弊端，经过数学家们坚持不懈的努力，终于在 16 世纪，法国数学家韦达探索出字母只是一个符号，不应该有特定的意义，这样字母就可以表示一类数了，而不是特定的未知数，所以我们这道题目是没有问题的。

例 3：已知两个数的和与差，求这两个数。

师：先独立思考两分钟，然后小组之间相互交流一下想法。

师：谁来说一下你们组讨论的结果？生 6 你来说一下。

生 6：我们组没有做出来，我们把未知数设为  $x$  和  $y$ ，题上说它们的和与差已知，但没说是多少所以我们没有办法列出方程。

师：谁来帮帮他们组的同学？

生 7：先不管和与差的值，用文字代替，最后将未知数  $x$  和  $y$  用和与差表示出来就行了。

师：你们的想法很好，但用文字叙述会显得很麻烦，在“用字母表示数”发展的开始阶段，数学家花拉子米解题就完全使用的是文字叙述的方法，你已经使用了字母表示未知数，在方法上已经优于他了，很棒！还有没有其他的想法？

生 8：我们组用的是代特殊值的方法，题上说两个数的和与差已知，所以我们假设他们的和为 10，差为 5，这样就可以算出来了。

师：你的想法竟然和数学家丢番图的想法一样，用特殊值代替题目中没有给出的值，但我设其他的数字表示是不是也可以？这样答案好像就不统一了。因此历史上就有人发现了丢番图方法的弊端，还调侃说“利用丢番图的方法解题，解了 100 道题，还是不知道第 101 道题怎么解。”

生 6：李老师，经过你刚刚的提示我想起来了“用字母表示数”发展的 3 个阶段，可以用字母表示已知数，我们懂了。

师：你们现在的想法已经达到了“用字母表示数”的最高阶段，然而在历史上从第二个阶段向第三个阶段跨越经历了近千年的时间，你们真厉害！

师：其他同学理解了吗？

生（齐声）：理解了。

师：现在“用字母表示数”你们都会应用了吗？

生（齐声）：会了！

师：那李老师就要考考大家了，完成任务单上的练习题，先独立完成，然后小组核对答案。

三、巩固练习

练习 1: 设某数为  $x$  ( $x \neq 0$ ), 用  $x$  表示下列各数。(任务单课前已发)

- (1) 比某数的一半多 2 的数。
- (2) 某数减去 5 的差与 10 的积。
- (3) 某数与 12 的和除以某数所得的商。
- (4) 某数的 4 倍除以某数的商。

练习 2: 运动会期间, 学校买了 26 个篮球, 每个篮球  $r$  元; 买了  $z$  个足球, 每个足球 32 元, 代数式  $26r+32z$  代表什么意思?

师: 有没有答案不一样的?

生 6: 生 9 的第 1 题和第 4 题数字和字母之间没写乘号。

师: 你观察的真仔细! 其实这里的乘号可以省略不写, 关于这个规定还有一段小故事呢! “德国数学家莱布尼茨认为乘号“ $\times$ ”容易与字母“ $x$ ”相混淆, 建议用“ $\bullet$ ”表示乘号; 如果有数, 数要写在字母的前面。这样, 用“ $\bullet$ ”标志乘号得到了广泛的承认。如今, 欧洲大陆派(德、法等国)规定以“ $\bullet$ ”作乘号。其他国家则以“ $\times$ ”作乘号, “ $\bullet$ ”为小数点。而我国则规定以“ $\times$ ”或“ $\bullet$ ”作乘号都可, 一般用于字母或括号前的乘号可略去<sup>[19]</sup>。”

师: 现在你明白生 9 为什么可以将乘号省略了吧?

生 6: 明白了!

#### 四、课堂小结

师: 谁来总结一下我们今天的学习内容?

生 3: 了解了“用字母表示数”的历史, 知道了数学家们的不容易, 我们应该学习数学家们坚持不懈、勇于探索的精神!

师: 你说的都是“用字母表示数”的数学史知识, 除了数学史, 还学习了什么?

生 4: “用字母表示数”在解题时的方便, 字母不仅可以表示未知数, 还可以表示已知数。

师: 谁再总结一下生 4 的回答, 字母可以表示什么数?

生 5: 任意数。

## 攻读学位期间取得的研究成果

已发表论文:

[1] 李星星, 陆新生, 常磊. 借助数学魔术巧学二进制[J]. 理科爱好者, 2019, 4(2):82-83.

## 致谢

两年的研究生生活已接近尾声，在这两年时间里有过执着，也有过彷徨，但留下更多的还是快乐和幸福。从入学到现在，经历的每一分每一秒似乎都历历在目，清晰可见。天下没有不散的筵席，此刻我唯有感激，感谢你们出现在我的生命里，让我今生拥有，倍加珍惜。这段岁月是充实的，我学习到了很多知识，也参加了很多教育实习，我成长了很多。

首先，我要对我的导师常磊老师和陆新生老师说一声谢谢，能成为常老师和陆老师的学生我倍感荣幸。忘不了第一次师生相见，陆老师和蔼的笑容化解了我内心的紧张与不安，让我在这个原本陌生的城市，感觉到家的温暖；在我选题和论文撰写的过程中，陆老师和常老师给予了我很多的建议和指导；每当我在迷茫和彷徨时，陆老师都无私地分享他宝贵的经验，使我少走很多弯路。在这两年的时间里，在陆老师和常老师的带领和帮助下，我的专业水得到了很大的提升，能跟随陆老师读书学习对我来说是一件无比幸运的事情。

其次，我要感谢我的学科教师张伟平老师、丁玮老师，你们的教导对我今后的教学工作给予了很大的帮助。

再次，我要感谢我的同窗好友们，谢谢你们在学习上对我的帮助和生活中对我的点滴关心。可爱上进的师弟、师妹们，与你们共度的每一分每一秒我都很快乐，叫我一声师姐，我却没有给予你们更多的帮助，深感愧疚，希望在以后的道路上，我们能够互相帮助，共同前行

最后我要感谢我的父母，从小对我悉心的教诲，正是由于父母对我无时无刻的爱和鞭策，我才有动力不断地进步，完成我的研究生学业。你们一直在我背后默默地支持我、包容我，我身为你们的女儿感到无比的骄傲和幸福。

2019 年 3 月