

经历符号抽象,发展数学眼光

——以“用字母表示数”为例

■ 周海斌

抽象能力是数学核心素养“数学眼光”的主要表现之一。其实,数学源于对现实世界的抽象,没有“抽象”,就没有数学这门学科。而符号则是抽象中的抽象,数学的符号化推进了数学学科的发展。《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)也把抽象能力(包括数感、量感、符号意识),列为数学核心素养“数学眼光”的主要表现之一。本文以“用字母表示数”教学为例,谈谈如何引导学生经历符号的抽象过程,发展数学眼光。

一、引发符号化需求,产生抽象意向

问题是数学的心脏。“数学眼光”的一个重要含义是在各种现实和数学的问题情境中,“看”出其中的数学规律,发现和提出有意义的数学问题。数学符号是对客观事物及其本质属性进行有意义抽象的产物。小学生处于具体形象思维向抽象逻辑思维过渡阶段,不易接受较为抽象的数学符号。因此,教师要创设情境,引发学生的认知冲突,用数学眼光发现问题,激发符号化需求,产生数学抽象的意向。

【片段一】

教师出示数量都为5的“人、苹果、玩具”的图片。

师:有什么相同的地方?

生:都是5个。

师:用什么符号表示?

生:数字5。

师:一个小小的符号表达了不同物体的相同数量。

教师出示:摆1个三角形用(1×3)根小棒,摆2个三角形用(2×3)根小棒,摆3个三角形用()根小棒……

师:说得完吗?怎么办?

生:可以尝试用一种简洁的方式来表示所有的情况。

【思考】“看”出“同数不同物”,这是学生已经具备的数学眼光。温习“由物到数”的抽象过程,将学生引入最近发展区,理解数字只是一个符号,为新情境下解决问题提供脚手架,为再一次抽象和创造新符号做好铺垫,为由常量数学走向变量数学蓄势。在此基础上,顺势创设新情境“摆三角形”,产生新问题“如何简洁地表示所有的情况”,激发学生的好奇心和创造力。

二、尝试符号化创造,领悟抽象本质

“数学眼光”是观察现实世界的一种特殊方式,其目的是透过事物的表面现象和各种物理属性,抽象出数量关系与空间形式。抽象是指舍弃事物个别的、非本质的特征,抽取出共同的、本质的特征的过程。荷兰数学家弗赖登塔尔说过,学习数学的唯一正确方法是实行“再创造”。因此,让学生经历符号再创造的过程,领悟抽象本质,对于发展数学眼光具有重要作用。

【片段二】

学生自主创造表达方式,小组交流反馈,归纳方法。

1.用省略号表示: 3×3 、 4×3 ……

2.用数量关系式表示:三角形个数 $\times 3$ =小棒的根数。

3.用自己的话描述:摆(若干)个三角形用(三角形个数的3倍)根小棒。

4.用字母表示方法一:摆(a)个三角形用(b)根小棒。

5.用字母表示方法二:摆(a)个三角形用($a\times 3$)根小棒。

对比优化:你们最喜欢哪一种?为什么?

小组讨论,得出结论:用字母表示显得简洁;与第4种方法相比,第5种方法只用了一个字母,并且能看出三角形和小棒之间的数量关系。

师:是呀, $a\times 3$ 这个式子既可以表示小棒的数量,又可以反映小棒和三角形之间的数量关系。那么,这儿的 a 可以表示哪些数?

生:1,2,3……

生:可以表示任意一个自然数,不固定,可以变化。

生:表示未知的数。

师:这儿的 a 可以用其他字母表示吗?或者用 \star 、 \square 等特殊符号表示吗?

生:都可以。

【思考】学生进行符号创造的过程,就是从算术思维走向代数思维的过程。从用数字表示,到用字母表示,再到用任意符号表示,学生逐步领悟抽象的本质,即符号的形式并不重要,只要这个符号能代表“一类数”,反映出这类数的共同特征。学生的“数学眼光”得到提升,对数学的认识经历了一次飞跃,从表象走向抽象,从有限走向无限,体会到用字母表示数的简洁性、概括性和一般性。

三、理解符号化规则,提高抽象意识

客观世界经“数学眼光”抽象后,形成概念、规则和结论等,再对这些数学语言进行二次抽象,形成符号化表征。数学语言符号化遵循一定的规则,有些规则看似是约定俗成的,但背后其实蕴含着道理,教学中教师不可以让学生机械记忆,而要进行有意义

的接受学习,理解规则这样界定的道理,增强抽象意识,提高“数学眼光”。

【片段三】

学生自主阅读教材,理解用字母表示数的规则,集体交流反馈。

生:加减除式子的格式与以往一样,比如, $280-b$, $a+28$, $x\div 5$ 。

生:乘法格式有特殊要求。一般将乘号省略,并且数字在前,字母在后。

师(追问):为什么将乘号省略?为什么数字在前,字母在后?

(学生疑惑)

师: $x\times 3$,你们觉得怎样?

生:乘号与字母 x 容易混淆。

师:所以将乘号省略,或者写成乘点。另外,人们习惯上将已知的写在前面,未知的写在后面,所以 $x\times 3$ 写成 $3x$ 或 $3\cdot x$ 。简写规则也不是随便定的,是有道理的。

生:1与 a 相乘,积写成 a ,省略1,因为1和任何数相乘,还等于那个数。

生: $a\times b$ 一般是简写成 ab ,不是 ba ,人们习惯按照字母顺序编排。

生:相同字母相乘有特殊形式,如 $a\times a$,写成 a^2 ,这个2表示有2个 a 相乘,有特殊意义,所以写在右上角,读作 a 的平方。

师:用字母表示数,为什么要定这些规则?

生:省略乘号后,显得很简洁。

生:这些规则都很有道理,例如防止混淆。

生:表达更准确。

【思考】用符号表征关系和结构遵循一定的逻辑规则,这些规则有很强的抽象性,这与学生已有的“数的表征”经验形成冲突。因此,学生在作业时经常出错。心理学家奥苏贝尔认为,有意义的接受学习的先决条件之一是材料必须具备逻辑意义。“用字母表示数有什么规则”“为什么定这样的规则”,让学生知其然更知其所以然,体会到数学的抽象不是为了简洁,而是要基于逻辑性、准确性等数学特点。

四、探索符号化运算,体会抽象价值

“数学眼光”赋予人们透过“个别”看出“一般”的能力。“新课标”指出,要让学生知道用符号表达的运算规律和推理结论具有一般性。因此,让学生经历符号化过程,培养抽象能力,不仅包括会用符号表征数量及其关系,还要能利用符号进行运算和推理,并让学生知道符号虽然很抽象,但基于计算法则和逻辑关系,它的运算和推理结果具有一般性,能代表一类问题,是解决数学问题的有力工具,从而引领学生体会抽象的价值,发展数学眼光。

【片段四】

教师出示题目: $2x+3x=?$ 让学生谈谈自己的想法。

生:根据乘法分配律, $2x+3x=(2+3)x=5x$ 。

师:是呀,运算律对字母式子同样适用。这儿的 x 可以表示什么数?

生:表示任意一个数,整数、小数、分数都可以。

师: $2x+3x=5x$,一个式子就能概括所有数的运算。你们能根据这个式子,编一个问题吗?

生:苹果每千克 x 元,先买2千克,再买3千克,一共花了多少钱?

生:汽车每小时行驶 x 千米,早上行驶2小时,下午行驶3小时,总共行驶多少千米?

生:六(1)班女生站成2排,男生站成3排,每排 x 人,六(1)班一共多少人?

师:能说得完吗?你有什么体会?

生:太厉害了,一个式子能代表这么多实际问题。

生:只要是这个类型的,都能用这个字母式子表示。

【思考】越是抽象的事物越具有一般性。理解符号表达的一般性,有利于培养学生模型意识,发展数学眼光,体会抽象价值。在本教学环节中,教师从两个方面引导学生理解一般性:一是式的运算,既然字母表示数,那么字母式子同样遵循数的计算法则和运算律,同时因为字母可以代表一类数,所以式的运算具有一般性;二是式的应用,不同的问题情境可以

用同一个式子来概括和表达。

五、追溯符号化历史,建立抽象观念

发展数学眼光必须激发学生对数学的好奇心与想象力。数学家罗素说过:“数学就是符号加逻辑。”数学的发展史就是符号的产生和发展史。通过探寻数学发展史,可以看到数学研究对象产生的原因、必要性以及表达方式的优化历程。因此,教师应引导学生追溯数学符号的演变历史,体会符号的作用,建立抽象观念,同时领略数学文化,激发学习兴趣,发展数学眼光。

【片段五】

教师出示课前的“人、苹果、玩具”图片。

师:现在大家都用数字“5”表示数。那么,古人是如何表示数的呢?数的表示是如何发展和演变的呢?

学生观看“微课”,了解“数的历史”:用物表示(石块、结绳等)、算筹表示(专制小棒等)、文字表示(壹、Ⅳ等古文字)、数字表示(阿拉伯数字)、字母表示(丢番图用“缩写字母”表示数、韦达把字母当作符号来表示数)。

师:你们有什么体会?

生:数学的发展过程很漫长和曲折。

生:无数数学家付出了艰辛的劳动。

生:数学越来越难了……

师:是呀,用字母表示数后,数学就从研究具体的数走向研究变化的、抽象的数,产生了新的数学分支,为现代科学的发展奠定了基础。同学们,这是一个新的数学世界,等着你们去探索 and 发现!

【思考】首尾呼应,联系课首“用数字表示数”,引出“数的表示”演变历史,再现人类探究历程的关键节点。让学生认识到,数学语言的产生和发展不是一蹴而就的,而是一个曲折而漫长的过程,是一个不断抽象和统一的过程。使学生体会数学家的努力和艰辛,并领略数学的文化和魅力,激发学生用“数学眼光”观察现实世界的兴趣。☞

(作者单位:江苏省泰州市凤凰小学)