

分类号\_\_\_\_\_

UDC\_\_\_\_\_

学 号 MZ120180230

密 级 \_\_\_\_\_



# 硕士学位论文

(全日制专业学位)

## APOS 理论视角下小学数学“用字母表示数” 教学设计研究

学 院： 教育科学学院

专业学位类别： 教育硕士

专业学位领域： 小学教育

研 究 生： 孙 盼

校内指导教师： 徐建星 副教授

校外指导教师： 陈 萍 扬州市教育局教研室

答辩委员会主席： 王映学 教授

答 辩 日 期： 2021 年 06 月 02 日

**A Study on the Teaching Design of "Use Letters to  
Express Numbers" in Primary School Mathematics from  
the Perspective of APOS Theory**

A dissertation submitted to  
Yangzhou University  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of  
Master of Education

By

Pan Sun

Supervisor: Prof. Jingxing Xu

Co-supervisor: Prof. Ping Chen

Primary Education

June 2021

# 扬州大学学位论文原创性声明和版权使用授权书

## 学位论文原创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是在导师指导下独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：孙盼

签字日期：2021年6月19日

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅。本人授权扬州大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

本学位论文属于（请在以下相应方框内打“√”）：

1、保密□，在\_\_\_年解密后适用本授权书。

2、不保密√。

作者签名：孙盼

导师签名：海建生

签字日期：2021年6月19日

签字日期：2021年6月19日

# 目 录

摘要.....	IV
Abstract.....	V
引言.....	1
一、研究背景和意义.....	1
(一) 研究背景.....	1
(二) 研究意义.....	2
二、核心概念界定.....	3
(一) 数学概念.....	3
(二) 教学设计.....	3
三、文献综述.....	4
(一) APOS 理论的研究.....	4
(二) 小学数学概念教学的研究.....	6
(三) 小学数学“用字母表示数”教学的研究.....	9
四、研究思路及方法.....	10
(一) 研究思路.....	10
(二) 研究方法.....	11
五、创新之处.....	11
第一章 APOS 理论视角下小学数学教学设计的理论基础.....	12
一、APOS 理论的内涵.....	12
(一) APOS 理论的渊源.....	12
(二) APOS 理论的主要观点.....	12
(三) APOS 理论的四个阶段模型.....	14
二、APOS 理论视角下教学设计的主要任务与框架.....	18
(一) 教学设计的主要任务.....	18
(二) 教学设计的基本框架.....	18
第二章 小学数学“用字母表示数”教学设计的前期分析.....	20
一、学生学习用字母表示数的前期调查分析.....	20
(一) 调查对象的选择.....	20
(二) 调查问卷的设计.....	20
(三) 调查的结果分析.....	21
(四) 调查结果对教学设计的启示.....	21
二、学习需求分析.....	22

三、学习者分析 .....	23
(一) 学习者的学习起点分析 .....	24
(二) 学习者的思维特征分析 .....	24
(三) 学习者的自我调节能力分析 .....	25
四、教学内容分析 .....	25
<b>第三章 APOS 理论视角下“用字母表示数”教学设计的环节 .....</b>	<b>30</b>
一、教学目标的设计 .....	30
(一) 制定教学目标的依据 .....	30
(二) 确定教学目标的内容 .....	31
二、教学内容的设计 .....	31
(一) 贴近学生认知和生活选取教学素材 .....	31
(二) 依据逻辑与规律呈现教学内容 .....	32
(三) 结合实际活动与抽象概括揭示概念本质 .....	32
三、教学过程的设计 .....	33
(一) 导入环节的设计 .....	34
(二) 新授环节的设计 .....	34
(三) 巩固环节的设计 .....	35
(四) 练习环节的设计 .....	35
四、教学评价的设计 .....	36
(一) 诊断性评价的设计 .....	37
(二) 形成性评价的设计 .....	37
(三) 总结性评价的设计 .....	37
<b>第四章 APOS 理论视角下“用字母表示数”的教学实施与效果分析 .....</b>	<b>38</b>
一、APOS 理论视角下“用字母表示数”教学实施的设计 .....	38
二、APOS 理论视角下“用字母表示数”教学的实施 .....	38
(一) 活动阶段, 游戏引入 .....	38
(二) 过程阶段, 动手感知 .....	39
(三) 对象阶段, 巩固概念 .....	39
(四) 图式阶段, 深化概念 .....	41
三、课堂效果分析 .....	42
(一) 提高了学生课堂的参与度 .....	43
(二) 营造了良好的课堂氛围 .....	44
(三) 提高了学生对数学概念的理解 .....	44
<b>第五章 APOS 理论视角下教学设计的建议 .....</b>	<b>46</b>

一、活动阶段，教师要善于挖掘教学素材 .....	46
二、过程阶段，教师要注重学生自主探究的过程 .....	47
三、对象阶段，教师要注重指导学生巩固所学概念 .....	47
四、图式阶段，教师要注重完善学生的知识体系 .....	48
结语 .....	49
参考文献 .....	50
附录：五年级“用字母表示数”的前测问卷 .....	53
致谢 .....	54

## 摘要

“用字母表示数”一节是培养小学生符号意识的重要内容，教学内容指的是从具体的数过渡到用字母来表示数。学生从特殊思维到一般思维的转化过程，实质上是学生符号意识的形成和发展的过程。这一转化过程，不仅能使学生的数学语言变得丰富，并且能够拓展学生逻辑思维，提高思维创新能力，从而培养学生基本的数学学习素养。

研究以 APOS 理论为基础，运用活动（Action）、过程（Process）、对象（Object）、图式（Schema）四个阶段建构模型，对苏教版五年级上册“用字母表示数”的教材内容，按分析系统、设计系统、反思系统的框架进行教学设计。具体以扬州市 Y 小学五年级的一个班同学为例，首先，通过对学生的问卷调查，了解学生关于“用字母表示数”的知识经验基础，对学生的学习需求以及教学内容进行分析，细化 APOS 理论的观点与操作行为，并且确定“用字母表示数”这一节课的教学目标、教学内容、教学过程、教学评价等要素，形成这一节课的教学设计与教案。

利用 APOS 理论设计的课堂教学实施发现提高了学生课堂的参与度，营造了良好的课堂氛围，提高了学生对概念的理解。结合小学数学教学的特征，针对课堂教学中的问题进一步提出了以下建议：在活动阶段，教师要善于挖掘教学素材，激发学生的数学学习兴趣；在过程阶段，教师要注重学生主动探究的过程，让学生能够感受和体验数学学习的乐趣；在对象阶段，教师要注重指导学生巩固概念，促使学生在再次经历概念形成的过程中加深对所学知识的理解；在图式阶段，教师要注重完善学生的知识体系，练习要适当的拓展，联系生活实际。

**关键词：**APOS 理论；小学数学；教学设计；用字母表示数

## Abstract

The section "Use letters to express numbers" is an important content for cultivating pupils' symbol consciousness. The teaching content refers to the transition from concrete numbers to using letters to express numbers. The transformation process of students from special thinking to general thinking is essentially the process of the formation and development of students' symbol consciousness. This process of transformation not only enriches students' mathematics language, but also expands students' logical thinking and improves their creative thinking ability, thereby cultivating students' basic mathematics learning literacy.

Based on the theory of APOS, this paper constructs a model in four stages: action, process, object and schema, and designs the teaching materials of "number represented by letters" in the fifth grade volume of Jiangsu education press according to the framework of analysis system, design system and reflection system. Taking a fifth grade class of Yangzhou Y primary school as an example, first of all, through the questionnaire survey of the students, we understand the knowledge and experience basis of the students about "using letters to express numbers", analyze the students' learning needs and teaching content, refine the views and operation behavior of APOS Theory, and determine the teaching objectives and teaching content of "using letters to express numbers", teaching process, teaching evaluation and other elements form the teaching design and teaching plan of this lesson.

The discovery of the implementation of classroom teaching designed by APOS theory has improved students' classroom participation, created a good classroom atmosphere, and improved students' understanding of concepts. Combining the characteristics of elementary school mathematics teaching, the following suggestions are further put forward for the problems in classroom teaching: in the activity stage, teachers should be good at digging out teaching materials to stimulate students' interest in mathematics learning; in the process stage, teachers should pay attention to the process of students' active exploration. Students can feel and experience the fun of learning mathematics; in the object stage, teachers should focus on guiding students to consolidate concepts, and urge students to deepen their understanding of the knowledge learned in the process of re-experiencing concept formation; in the schema



stage, teachers should focus on perfecting students. The knowledge system should be appropriately expanded and practiced, and should be linked to the reality of life.

**Key words:** APOS theory; Primary school mathematics; Instructional design; Use letters to represent numbers

## 引言

### 一、研究背景和意义

#### (一) 研究背景

##### 1. 数学课程改革的要求

数学教学应该贴近生活本质，传授数学概念，运算规则以及数学结论的得出过程和结论本质。数学概念既具有对象性，又具有过程性，它不仅对学生的逻辑思维能力有所提升，更是一项具有现实应用意义的教学过程。<sup>①</sup>这不仅仅是反映了学生直接学习数学概念的情况，而且也反映了我国数学课程的教育趋势，使他们能够体验数学概念形成的过程。而 APOS 理论主要分为四个阶段来理解数学概念，分别是活动、过程、对象和图式阶段。通过这四个阶段可以清晰反映学生认识、学习数学概念的抽象思维形成过程。因此，老师可以遵循这四个阶段的划分，并且来判断学生对概念的认知达到了哪一阶段，达到何种程度，将学生学习数学概念的心理发展过程有效地服务于教师的“教”，从而有针对地进行教学。将其运用于小学数学用字母表示的概念教学中，能更好地帮助学生用字母表示数的相关知识。

小学生在“数与代数”中的“用字母表示数”章节首次接触数学符号概念。苏教版小学数学五年级上册“用字母表示数”这一节课是培养小学生符号意识的重要起点，教学内容指的是从具体的数过渡到用字母表示数。从教材内容的编排来看，体现了知识螺旋上升的过程，而 APOS 理论的四个阶段和用字母表示数的学习进程是相契合的，它反映了学生思维上认识和构造知识概念的发展过程。

##### 2. 小学数学概念教学的重要性

概念性数学知识的学习作为数学知识理论框架的基础，同时也是教育内容中的重要教学环节。这是学生理解和掌握数学知识的先决条件，同时也是培养学生计算和解决问题的先决条件。科学有效地完成概念的教学，不仅能够提高数学概念的教学质量，还能够对学生之后的应用数学概念有着举足轻重的作用。但是，学生在学习数学概念时常会碰到问题抽象、难以结合实际的难题，教师也会碰到讲解枯燥、课堂氛围沉闷而

<sup>①</sup> 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.

乏味以及学生积极性低的问题。面临以上问题,学生很难直接理解数学概念,并且学习的积极性也会受到一定影响。学习数学概念是一个思维上升的过程,学生需要将已有的、生活化的、片段的感性理念转化为抽象的、完整的、逻辑性强的、理性的认知。在理性认知基础上,学生可以全面理解和掌握运用数学概念,进而理解数学规律,掌握一定的推理分析能力和灵活的运算能力。在这一过程中,教师需要明白学生学习数学概念的目的是为了灵活运用和解决实际问题,而不是让学生单纯记住概念。因此,教师教学过程中要将抽象的数学概念形象化,将枯燥的课堂趣味化。

### 3.数学概念教学的必要性

以教师为课堂教学中心的传统教学模式对学生的主观能动性认识不足,学生是数学概念的一个接受者,只知道概念是什么。大部分老师认为,数学概念就只是一种定义,学生只要熟记就行,教学的关注点在概念的应用上,往往忽视了学生的概念生成过程。而 APOS 理论则是将学生学习数学概念的过程按照顺序分为四个阶段,其重视这一过程大于数学概念本身。APOS 理论符合当前以学生为中心、重视学生思维发展的教育观念。该理论在小学数学教学中的合理运用,发挥学生的主观能动性,能清晰地看到数学概念的形成过程,在这一过程中,学生展现出来的思维能力的差异性,充分体现出小学数学概念学习的本质。

## (二) 研究意义

1.利用 APOS 理论可以进一步丰富小学数学概念教学理论体系,通过构建数学概念框架,培养学生的抽象思维来理解数学概念的形成过程。

2.小学数学概念具有一定抽象性,因此其教学过程需要一定的理论支撑,APOS 理论能够构建概念形成的过程并且具有一定应用范围,能将 APOS 理论应用到教学设计中,为小学数学教师提供“用字母表示数”可参考的教学案例。

3.将 APOS 理论应用于小学数学用字母表示数的教学中,可以不断改进教学环节,形成一份可实行的、完善的教学设计,对于提高在职教师的教学质量和教育从事者完善教育理论来说是一个双赢的过程,并且为广大教师的实际教学提供可操作性的建议。

## 二、核心概念界定

### （一）数学概念

目前，哲学的认识论是大多数人们观念中对概念的认识和理解的来源。数学概念是一种主观认识和理解客观事物的思维形式，反映了数学主观认识和客观理解相结合的抽象思维。数学概念的学习反映了数学的应用性本质，即可以通过主观的、人为规定的数学符号来表示和计算客观存在的事物。学习数学内容包含主客体和学习过程，数学概念的教学往往是重视学生学习过程，但作为数学内容的组成因素，也需要兼顾学生这一学习对象。鲍建生学者将数学概念定义为用数学符号对客观对象进行抽象性概括。<sup>①</sup>李善良学者指出数学概念的实质是反映了一类本质属性相似的数学对象，是学生感知已有生活经验的过程。<sup>②</sup>在研究中，数学概念是学生通过观察数学对象，理解其本质属性，并最终形成针对这一数学对象所对应的特征思维能力的反映。

### （二）教学设计

教育是我们人类社会的生产生活中所特有的一项特有的活动，它的中心和重心是“教学”，而教学又通过教学设计理论来实现。肯普学者对教学设计定义如下：教学设计是系统性地分析研究教学过程中具有联系性的内容产生的问题和需求。在连续性过程中确定方法步骤，最后评价教学结果的系统过程。<sup>③</sup>1998年，鲍嵘学者在这一基础上对教学设计补充解释为促进教学活动程序化、精确化、合理化的现代教学技术。<sup>④</sup>本文核心内容为实现教学目的，通过教学设计过程做好前期课程内容的准备和提前预判课堂上如何组织学生互动、合理利用媒介资源的设计。教学设计服务于教学目的，即教授知识概念和提高学生学习能力，通过对学者的教学理论进行系统科学的学习，合理地融入到教学内容中，形成一套从目标到内容、方法、策略、评价的完整体系。

① 鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社, 2009.100-101.

② 李善良. 现代认知观下的数学概念学习与教学[M]. 南京:江苏教育出版社,2005.50.

③ 张旭,许林. 现代教育技术[M]. 北京:科学出版社,1995:30.

④ 鲍嵘. 教学设计理性及其限制[J]. 教育评论, 1998(03):34-36.

### 三、文献综述

#### (一) APOS 理论的研究

##### 1.APOS 理论的发展

APOS 理论最早由杜宾斯基学者提出,该理论以皮亚杰反抽象建构主义理论为基础,主要针对儿童时期逻辑思维发展进行的研究,并进一步将研究范围扩大到数学概念领域,描述了儿童逻辑思维的发展,并将这种观点扩展到了数学概念。<sup>①</sup>1993 年,杜宾斯基在研究中指出,APOS 理论教学模型是以建构主义学习理论为基础而建立的。<sup>②</sup>1996—1997 年,杜宾斯基等人在文章指出 APOS 理论能为学生学习抽象数学概念提供帮助。<sup>③</sup>

我国学者对于 APOS 理论方面的研究起步较晚,从 1992 年开始引进 APOS 理论用于教学研究,并且取得了一定的研究成果。我国很多教育教学研究中也发现了 APOS 理论是一种具有数学学科性的建构主义学习理论。<sup>④</sup>21 世纪初,乔连全学者对 APOS 理论的起源、内涵、特点以及其相关的模式进行了阐述,并且详细的介绍了国外学者对 APOS 理论的研究成果。<sup>⑤</sup>2004 年,张莫宙学者详细介绍了 APOS 理论的四个阶段,通过对学生在这四个阶段的不同心理反应进行描述,根据心理的不同反应,为今后的研究提做了铺垫。<sup>⑥</sup>2009 年,鲍建生博士对 APOS 理论四阶段的内部联系进行了系统的说明,并且研究了国外 APOS 理论的应用和发展前景,此外还基于我国目前的教育现状提出了几点研究展望。<sup>⑦</sup>

##### 2.APOS 理论的实际应用

杜宾斯基等人在 APOS 理论视角下研究了高等数学中的高阶无穷概念、傅里叶级

<sup>①</sup> Dubinsky E, McDonald MA. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research[J]. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, 2001:275-282.

<sup>②</sup> Ed Dubinsky. Learning binary operation groups and subgroups[J]. The journal of mathematics Behavior, 1997, 3(16):187-239.

<sup>③</sup> Brown,A. DeVries,D. Dubinsky,E.&Thomas,K.(1997). Learning binary operations,groups,andsubgroups[J]. Journal of Mathematical Behavior, 1997,16(3): 187-239.

<sup>④</sup> 李莉.学生学习数学概念的层次分析[J].数学教育学报,2002(03):12-15.

<sup>⑤</sup> 乔连全.APOS:一种建构主义的数学学习理论[J].全球教育展望,2001(03):16-18.

<sup>⑥</sup> 张莫宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2004.116.

<sup>⑦</sup> 鲍建生,周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海:上海教育出版社,2009.100.

数等问题, APOS 理论可以作为一种工具, 帮助学生构建数学概念体系。<sup>①</sup>以色列学者 Ilana Arnon 将 APOS 理论与皮亚杰的知识理论相结合, 并以分数作为范例, 证实了结合后的理论有利于学生的理解。加拿大学者 Rina Zazkis 在研究位置与小数点转换关系时, 在教学过程中结合 APOS 理论。Angel Cruz Delgado 利用 APOS 理论研究单位圆法求解正弦、余弦和反三角函数时的心理结构过程, 它们在学生理解这些功能中起着关键作用。并且他们对 11 名刚刚完成传统大学三角学课程的学生进行了半结构化的采访。对访谈的详细分析表明, 该猜想在描述学生在解决问题时的行为方面是有用的。<sup>②</sup>Rafael Martínez-Planell 等人基于 APOS 理论, 研究学生对双变量函数的基本概念及其图形表示的学习过程, 该研究包括三个研究周期。三个研究周期中, 每个研究周期都使用对学生的半结构化访谈来测试一个关于心理构建(遗传分解)的猜想, 学生可能会使用该猜想来理解两个变量的功能, 根据访谈结果开发支持课堂活动, 并逐步改进该猜想。该研究展示了如何使用不同的 APOS 研究周期来不断地提高学生对数学概念的理解。<sup>③</sup>

唐艳老师以八年级上册《平面直角坐标系》(北师大版)的教学设计为例, 以 APOS 理论为基础来进行教学设计, 将学生思维从一维的形象的数轴概念拓展到二维的抽象的平面直角坐标系。<sup>④</sup>周士民在硕士毕业论文中指出, 函数概念具有二重性, 与 APOS 理论中的过程阶段和对象阶段相对应, 形成函数概念需要经过过程的内化、过程的压缩、对象的实体化三个操作阶段, 与 APOS 理论中的四阶段理论相对应。<sup>⑤</sup>周艳老师在 APOS 理论视角下组织教学“圆的认识”。通过深入研究数学概念教学的具体内容, 实现学生从本质上构建理念框架, 从而实现教学优化的目标。<sup>⑥</sup>上海师范大学厉善基于 APOS 理论设计高中直线方程的概念教学, 使用两个平行班作对比, 研究发现 APOS 理论的四阶段模型与直线方程的教学过程相对应, 有针对性的设计活动阶段和过程阶段, 学生主动学习的积极性明显提高。<sup>⑦</sup>贵州师范大学宋伟楠在 APOS 理论视角下对圆锥曲线中的相关数学概念做了教学设计, 并且利用两个同层次的班级

<sup>①</sup> Dubinsky E, McDonald MA. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research[J]. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, 2001:275-282.

<sup>②</sup> Rafael Martínez-Planell, Angel Cruz Delgado. The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory[J]. Journal of Mathematical Behavior, 2016:43.

<sup>③</sup> Rafael Martínez-Planell, María Trigueros. Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables[J]. Journal of Mathematical Behavior, 2019:55.

<sup>④</sup> 唐艳. 基于 APOS 理论的数学概念教学设计[J]. 上海中学数学, 2005(12):22-24.

<sup>⑤</sup> 周士民. 基于 APOS 理论的高中函数教学研究[D]. 广西师范大学, 2007.

<sup>⑥</sup> 周艳. 基于 APOS 理论视角下的小学数学概念教学[J]. 小学教学参考, 2019(35):94-95.

<sup>⑦</sup> 厉善. APOS 理论下高中直线方程教学研究[D]. 上海师范大学, 2019.

分别进行教学实验。实验结果表明, APOS 理论视角下的圆锥曲线教学设计效果明显强于传统教学设计。<sup>①</sup>目前, 我国关于在 APOS 理论视角下中小学中的教学实际应用主要集中于函数、向量、方程、几何等方面。

史宁中学者为了验证 APOS 理论的教学效果, 分别通过对 APOS 理论的四个阶段进行设计对应的函数知识试题, 根据学生作答情况, 并且运用 APOS 理论的四个阶段对学生进行评价, 进而对教师的教学效果进行评价。<sup>②</sup>卢清荣老师指出学生的主观能动性促使学生下意识将所学概念转化为数学理论的行为使得学生可以根据 APOS 理论分类所学的数学概念, 并作出评价, 直到自身或身边同学进一步提升概念理解和掌握的能力。<sup>③</sup>

纵观国内外对 APOS 理论的研究过程, 早期研究大多针对 APOS 理论体系本身, 后期研究则是在 APOS 理论体系基础上侧重于对 APOS 理论实际应用的研究。而针对应用对象本身, 早期的研究应用对象都为高等数学概念, 而后期中国学者将 APOS 理论引进国内后, 在数学教育深化改革和核心素养快速发展的前提下, APOS 理论应用范围逐渐从高等数学概念的教学中延伸到中小学数学概念的教学中。

## (二) 小学数学概念教学的研究

### 1. 概念教学存在问题的研究

学者在研究小学数学概念教学时提出了以下常见问题。例如, 张婷提出, 教师在进行概念教学时不联系学生的生活实际, 进行灌输式的教学; 不注重学生的课堂参与, 只强调学生记住概念能够做题; 不注重学生的课堂实践, 忽视了学生是学习的主体。<sup>④</sup>蒋萍红提出小学数学概念教学存在的问题有: 学生的学习态度不端正; 在学习方法上, 师生和家长都因为传统思维的局限性, 误以为读书背诵只存在于语文、英语这类文科学科, 而数学这类理科学科只需要侧重于解题思路和解题方法以及解题的正确性; 家长不能够接受数学教师布置读书背书任务, 否则会影响数学教师在家长心中的权威性; 教学过程重结果, 轻概念的形成过程。<sup>⑤</sup>刘洪侠总结了三点问题: 第一, 教学形式的单一, 固化了学生的思维; 第二, 教学内容孤立, 削弱了教学的实践性;

<sup>①</sup> 宋伟楠. 基于 APOS 理论的高中圆锥曲线教学设计研究[D]. 贵州师范大学, 2017.

<sup>②</sup> 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007(02): 48-50.

<sup>③</sup> 卢清荣. APOS 理论下数学语言转换的学习与评价[J]. 教育科学论坛, 2019(34): 47-50.

<sup>④</sup> 张婷. 小学数学概念教学存在的问题及解决策略[C]. 教育部基础教育课程改革研究中心, 2019: 77.

<sup>⑤</sup> 蒋萍红. 小学数学概念教学存在的问题及解决策略[J]. 小学教学参考, 2018(35): 43-44.

第三,忽视归纳过程,降低了学生的运用能力。<sup>①</sup>陈霖湘在概念教学中提出了以下问题:概念教学的机械化、概念教学的散点化、概念数学的单调化。概念的死记硬背、生搬硬套并不是真正意义上的理解,学生更不可能运用概念。部分老师为了赶教学进度,在课堂中对概念的形成过程教授地很仓促,并没有以学生为主体,多层次、多角度地加以分析。<sup>②</sup>

## 2.小学数学概念教学策略的研究

曾世锋提出三点小学数学概念教学策略,第一,小学数学的概念学习需要依靠生活中的经验来引导,教师要依据生活概念,采取辅助教学的方式;第二,教师要依据不同概念,采取对应教学。例如在“圆的认识”教学时,可以结合生活实际中圆的物体,让学生能够利用这些物体画出圆,激发学生潜意识里对圆的感性理解。第三,教师要依据概念分类系统性教学。教师要通过基础资料将小学数学知识串联形成一个完整的框架,并将小学数学知识框架讲解传授给小学生,为小学生学习小学数学打下基础。<sup>③</sup>周建东认为要灵活运用和准确把握以下教学策略:第一点,入境设“疑”。在教学过程中,教师要摸透对应年龄段学生的好奇点,从而选取教学内容,通过激发学生的好奇心引入数学概念,在学生进入教学情境后,巧妙的布置疑点,等待学生“破案”。第二点,默转潜“移”,引导学生引申、推导出新概念,帮助学生建立概念。第三点,集思广“议”,数学概念的学习需要让学生经历充裕的思考和互动交流的过程,从而由困惑走向顿悟,由表层走向深入。<sup>④</sup>季秋霞在教学中时常发现,尽管有些学生对概念“倒背如流”,但在运用的过程中还是会频频出错,对此,她提出了以下三点策略:第一,激发兴趣,吸引学生学习概念;第二,联系生活,促进学生理解概念。第三,设计实验,帮助学生掌握概念。<sup>⑤</sup>邱伟星提出小学数学概念的教学要经过概念的感知、概念的获得、概念的巩固这三个阶段,并针对这三阶段分别提出了相应的教学策略。<sup>⑥</sup>将策略框架图绘制如下:

① 刘洪侠.小学数学概念教学存在的问题及解决策略[J].新课程(小学),2019(12):157.

② 陈霖湘.小学数学概念教学存在的问题与实施策略[J].教师,2018(18):51-52.

③ 曾世锋.小学数学概念教学的有效策略[J].数学学习与研究,2019(15):160.

④ 周建东.小学数学概念教学策略研究[J].小学教学研究,2019(30):63-65.

⑤ 季秋霞.策略引领,做好小学数学概念教学[J].数学大世界(下旬),2020(07):41.

⑥ 邱伟星.小学数学概念教学策略例谈[J].小学教学参考,2019(29):94-95.



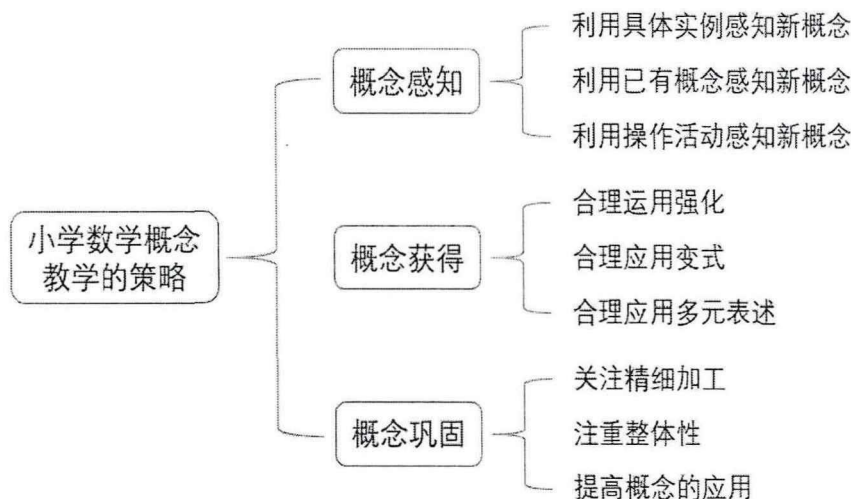


图 1-1 小学数学概念教学的策略

### 3. 小学数学概念教学的多样化设计

学者在研究小学数学概念时，多在教学方法上加以创新，提出一些新颖的教学方式，并且研究表明这些教学方式有助于学生学习和理解数学概念。李旭、张青老师通过思维导图直到学生学习和理解数学概念。思维导图主要有以下几点优势：第一点，创新小学数学课堂教学；第二点，提高学生数学知识水平；第三点，培养学生数学思维能力。<sup>①</sup>林俐将问题教学法使用到小学数学概念教学中，发现有以下三点的应用：第一点，设置情景模拟，提高学生对所学概念的好奇心。这一点贴合小学生的性格。再以学生感兴趣的话题切入，放松学生思维，提起学生学习数学概念的兴趣。第二点，结合生活实际，方便学生理解数学概念。学生对于数学概念的理解可能是抽象的，但结合生活实际问题之后，学生可以以理解生活实际的方式来理解数学概念。第三点，操作化问题，提高学生概念空间意识。在开展空间概念主题教学时，通过指导学生亲自动手实践，在这一过程中学生能够更加直观形象的对空间概念的本质属性产生深刻认识。<sup>②</sup>冉和春在变式理论的视角下，从另一个角度来研究小学数学概念教学的教学设计，结合小学生的认知能力和教材中数学概念的特点，以图象体验言语符号等表征为基础，构建一个相关联的体系，以“倍的认识”为例进行教学设计。<sup>③</sup>

### 4. 小学数学概念教学的育人价值的研究

<sup>①</sup> 李旭,张青.思维导图在小学数学概念教学中的运用[J].科学咨询(科技·管理),2019(08):166.

<sup>②</sup> 林俐. 问题教学法在小学数学概念教学中的应用[C].教育部基础教育课程改革研究中心,2019:99-100.

<sup>③</sup> 冉和香.基于变式理论的小学数学概念教学设计研究[D].西南大学,2020.

朱桢认为小学数学概念教学中蕴含着育人价值有：第一，能够积累学生的数学活动经验；第二，能够培养学生的数学思维；第三，能够培养学生思维的深刻性；第四，能够提升学生的学习能力。<sup>①</sup>高红学者通过研究发现，思维的锻炼可以显著提高学生在学习过程中认知数学概念,并且这一学习过程也会反作用于提升学生的思维能力。<sup>②</sup>小学数学概念的育人价值被闫小颜学者划分为一般价值和特殊价值。<sup>③</sup>具体整理如下图所示：

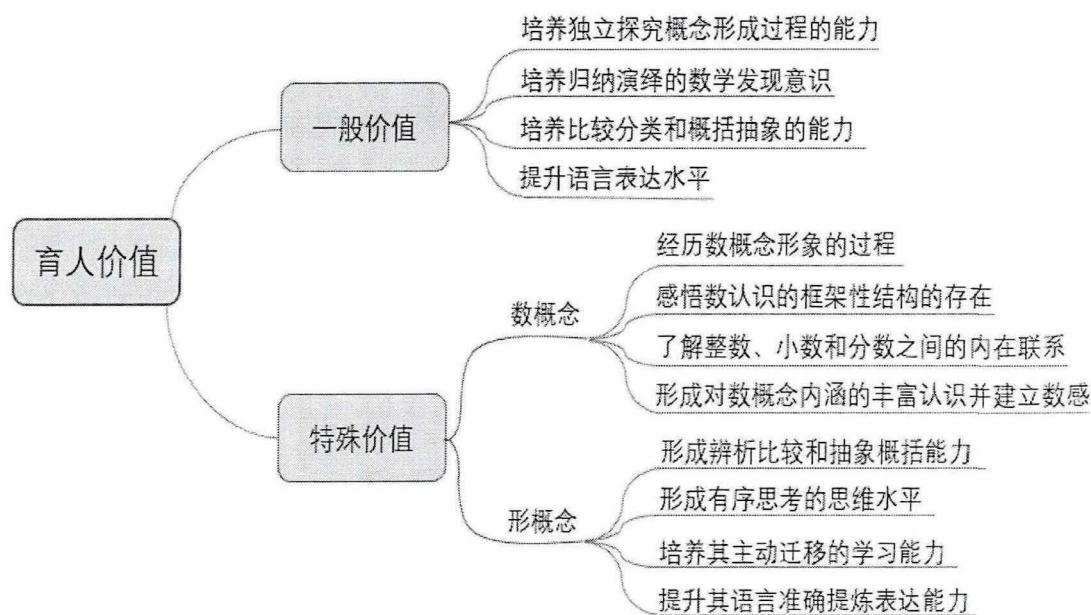


图 1-2 小学数学概念的育人价值

### （三）小学数学“用字母表示数”教学的研究

用字母表示数为小学数学“数与代数”模块中的核心重点之一，对于小学生来说是学习方程的基础。“用字母表示数”是学生一般思维到抽象思维的开始，是从算术思维过渡到代数思维的起点，是从具体的数过渡到抽象字母的开端，涉及到符号意识、抽象思想、代数思维等，对于以后的代数学习具有非常重要的意义。在2012年苏教版小学数学教材中，教材的编排循序渐进，由浅入深，内容的设计贴近生活，以学生为中心，贯彻了以学生为本的教育理念。

<sup>①</sup> 朱桢.小学数学概念教学中的育人价值[J].新课程(小学),2015(09):46-47.

<sup>②</sup> 高红.试论小学数学概念教学的育人价值[J].内蒙古教育,2015(24):19.

<sup>③</sup> 闫小颜.小学数学概念教学的育人价值及其过程结构研究[D].华东师范大学,2011.

有关用字母表示数的主要研究都集中在文献期刊,很多都是有关用字母表示数的具体的教学设计,包括教师课堂教学实录的分析、建立在某个理论基础上对用字母表示数的相关知识进行教学设计等。在搜集、阅读有关用字母表示数教学案例中,发现大部分一线老师都是用新课程的教学观、学生观、教师观来进行课程内容的设计,以学生为中心,贴近生活实际。唐文蓉老师提出,课堂教学要因材施教,充分考虑小学生的性格特点,接受能力等实际情况,例如在进行“用字母表示数”教学概念设计时,教师可以通过营造氛围,激发学生数学思维能力,从而提高教学效率。<sup>①</sup>徐海峰学者通过研究提出以下观点:教师在数学概念教学过程中,应该帮助学生搭建数学模型,让学生经历从认识字母表示数、理解数量关系到总结其中的数学关系这一循序渐进的过程,从而使学生有收获的满足感,对数学学习产生兴趣。小学教材在理解和教学数学问题时,通常以学生熟悉的年龄问题入手,教师在教学过程中可以接受教材这一指导理念,以年龄为中心,提出问题,让学生在熟悉的生活问题上产生兴趣,深入探究数学学习过程中的乐趣。<sup>②</sup>吴雅萍老师是以变构学习的模型作为其研究的理论依据,对学生进行充分了解以后,将这一理论用于用字母表示数的教学设计,显著提高了教学效率,优化了教学结果。<sup>③</sup>李大永老师认为,在进行“用字母表示数”的教学设计时,必须对教学活动进行数学知识的溯源处理。而“用字母表示数”产的源头是数学概括凝练的发展模式。教学活动必须展开数学知识的形成与发展的过程。<sup>④</sup>

## 四、研究思路及方法

### (一) 研究思路

APOS理论来源于建构主义理论,关注学生获得概念形成的过程。本研究以APOS理论为基础,以“用字母表示数”作为概念教学内容,对小学生用字母表示数的概念理解的水平现状进行调查和分析,并结合前人的研究成果和实际应用中的经验,对APOS理论的重点、可行性和适用性研究后应用于数学概念教学,并在此基础上进行教学反思。研究以理论结合实际应用,针对性地分析APOS理论并应用于实际教学过

<sup>①</sup> 唐文蓉. 创设情境, 引发思考——苏教版小学数学《用字母表示数》教学案例分析[J]. 读与写(教育教学刊), 2020, 17(01): 168.

<sup>②</sup> 徐海峰. 立足已有认知经历探究过程——苏教版小学数学“用字母表示数”教学例谈[J]. 小学教学参考, 2018(21): 29.

<sup>③</sup> 吴雅萍. 基于变构学习模型的小学数学“用字母表示数”教学设计研究[D]. 扬州大学, 2017.

<sup>④</sup> 李大永. 用字母表示数的教学设计与策略分析[J]. 中小学数学(小学版), 2019(10): 43-45.

程中。

## （二）研究方法

### 1.案例分析法

选择“用字母表示数”作为教学内容，案例的选取贴合实际生活，选取生活中具有代表性的案例，在课堂上进行话题引入和研究，再运用APOS理论在学习过程中解构、剖析和总结这一案例，再进行案例的推广教学。

### 2.问卷调查法

选取了“用字母表示数”作为教学内容，并设计相关的前测问卷。对学生所做的问卷情况进行数据统计并分析，根据分析结果掌握学生的大概水平，了解用字母表示数对学生来说的困难所在，运用APOS理论对教学的重难点进行剖析和总结，从而有针对性地教学研究，为实际教学提供可借鉴之处。

### 3.访谈法

通过对学生的开放式访谈，了解学生“用字母表示数”的学习、概念的掌握情况，以及课堂练习题做错的原因。

## 五、创新之处

第一，探讨 APOS 理论下的小学数学教学设计，将 APOS 理论的四个过程阶段嵌入到“用字母表示数”为例进行的教学过程中。在 APOS 理论视角下，小学数学“用字母表示数”的教学设计突破了传统教学设计中以教师为中心的局限性，使得数学概念学习更侧重于教学过程中的创造性。

第二，APOS 理论视角下的教学设计兼具数学概念教学的理论性和应用性，利用其理论性来进行教学设计、教学活动、教学组织；利用其应用性作为一种检测评价手段来观察、分析、总结和评价学习过程、思维过程和学习结果等。

# 第一章 APOS 理论视角下小学数学教学设计的理论基础

## 一、APOS 理论的内涵

### （一）APOS 理论的渊源

在上世纪 80 年代,美国对课堂教学模式进行了改革,提倡教师采用“交互式教学”和“范例教学”的模式,学生主要采用探究式的学习方式,通过师生、生生之间以及学习资源的多边相互作用,培养学生主动建构知识和合作探究知识的能力,从而使得 APOS 理论得以发展。杜宾斯基等人在构建主义教育观的过程中发展出一种用于学习数学概念的模型,从而提出了 APOS 理论模型,发展出一种用于学习数学概念的模型。在皮亚杰的“自反抽象”理论基础上,美国数学家杜宾斯基进行了延伸,结合学生是如何学习数学和怎样的教学能够有效帮助学生学习数学这两个数学教育界核心问题。<sup>①</sup>经过不断地教学实践形成了 APOS 理论,“自反抽象”理论是指从自身第一视角经历过活动阶段以后,再以一个第三视角的旁观者角度看待自身的活动表现,从而反思、总结所经历活动的过程、体验、方法和结果。<sup>②</sup>在这整个“自反”的过程中,个体是学习的主体地位得到了充分的发挥,同时也有利于个体创造性思维的发展。APOS 理论是结合数学教学实践研究得出的具有学科特色的建构主义教学理论,它与新课标倡导的教学理念相吻合,被称为近年来数学教育界最先进的教育理论之一。

### （二）APOS 理论的主要观点

APOS 理论主要针对知识、学习、教学提出了基本观点,并且在此基础上进一步提出数学概念学习的基本观点。下面简单介绍 APOS 理论的知识观、学习观、教学观。

#### 1. 知识观

皮亚杰对知识观定义如下:知识不是片面的主观性或客观性,而是在与环境的互

<sup>①</sup> 鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M].上海:教育出版社,2009.102.

<sup>②</sup> Brown A , Devries D J , Dubinsky E , et al. Learning binary operations, groups, and subgroups[J]. Journal of Mathematical Behavior, 1997, 16(3):187-239.

动过程中个体构建出的结果。<sup>①</sup>这个构建过程和结果基于主体和客体之间的相互作用的。在《生物学与知识》一书中皮亚杰认为,逻辑数学结构是反省抽象过程中所形成的完全意义上的构建,而不是单纯的发明或发现。<sup>②</sup>反省抽象是指为单个操作提取调整,并在更高层次上重新组织这些调整的过程。具体来说,所谓的反省指的是自我反思,自己做了实践性的活动,然后把自己置之事外,从一个旁观者的角度,分析自己做了什么事情,做的怎么样,这个过程中存在哪些问题,并且得出某个结论。绝大部分的数学概念的形成都经历了一个反省抽象的活动过程。冯·格拉合菲尔德也说过:“知识不是由主体被动接受的,而是主动建造的。”

## 2.学习观

因为 APOS 理论形成和发展是以构建主义理论为基础,因此其学习观与构建主义具有相关性和一致性。学习数学概念是学生主动构建概念的一个过程。在教学过程中,学生并不能依赖教师来体验、抽象出数学概念,而是由学生自己在学习的过程中亲身体验和抽象获得对所学数学概念的认识。荷兰著名数学教育家弗莱登塔尔也曾说过“毫无疑问,学生应当学习数学化。”<sup>③</sup>学生学习数学概念的过程中,要循序渐进,而不是一味的接受教师的讲授,一蹴而就,而没有自己思考过程,在学生学习数学概念时,每个人都要遵循思维建构的一般心理过程。最后,要运用数学的心理过程来学习数学概念,学生应当在平时的数学学习中,养成用数学思维思考的习惯。

## 3.教学观

APOS 理论侧重于学生数学概念的自主构建的过程,但是这并不排斥教师在学生学习数学概念过程中的引导作用。这不仅仅是关注学生外在的行为变化,更是关注学生内在思维变化的过程。其次,APOS 理论的四个阶段活动、过程、对象和图式的建构要求教师必须关注学生学习的一个过程,而不仅仅是学生学习的一个结果。只有学生亲自经历过知识建构的过程,才能有助于学生学习能力的提高,培养学生的发散性思维。APOS 理论模型基于两个假设,其中之一为假设学生不会通过共同起点、共同背景、共同过程达到共同目标。<sup>④</sup>每位学生都拥有不同的知识经验,他们都是自己学习的主体,都是带着自己已有的生活经验走进课堂的。学生们都是按照自己的认识和理解方式建构自己的知识体系。学生学习数学概念,与自己本身的数学认知结构水平相适应,所以

<sup>①</sup> 施良方. 学习论[M].北京:人民教育出版社,2001.168.

<sup>②</sup> J.Piaget, Genetic Epistemology[M].Four Woodbridge Lecture 1968.New York:Columbia University.

<sup>③</sup> 弗莱登塔尔. 作为教育任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬译.上海:上海教育出版社.1973.134.

<sup>④</sup> Ed Dubinsky & D. Tall. Advanced Mathematical Thinking and the Computer in Advanced Mathematical Thinking [M] (D.Tall,ed.),Kluwer 1991:231-250.

对于同一个数学概念,由于学生认知水平和结构的差异,理解能力也不同。数学概念的教学应该遵从每位学生的这种个体化差异,差异化的知识水平,教学活动的开展和实施应该以学生已有的经验为基础,同时这也体现了以人为本的素质主义教学观。

### (三) APOS 理论的四个阶段模型

杜宾斯基指出数学概念具有抽象性,不像具体的事物可以从无到有。数学概念的学习需要学生亲自经历概念的形成过程,教学的目的是为了辅助学生完成这一过程。APOS 理论将数学概念的学习过程分为四个阶段,分别是活动、过程、对象、图式阶段,四个阶段存在递进关系。在数学概念教学活动中,如果对学生的心智加以引导,让学生在经历活动、过程、对象这三个阶段之后,以形成图式的方式理解和学习数学概念,建构数学思维,并用于理解数学概念,解决数学概念的应用问题。

#### 1.活动阶段 (Action)

活动阶段是通过实际操作引入数学概念,使学生对所学概念有个初步认知。因此,这一重要阶段又称作“操作阶段”。数学概念本质的内在性和隐藏性决定了需要通过活动探究将本质变得显而易见。这里的显而易见是指活动探究的过程中学生的肢体动作以及广义上的全部的数学活动,可以是具体外在的操作活动,比如计算、动手操作、实验等等,也可以是头脑中的思维活动,比如猜想、回忆、推理、想象等等。<sup>①</sup>比如,教师在教授苏教版二年级上册的“厘米的认识”这部分知识的过程中,教师可以先引导学生让他们观察刻度尺,并且用手相互指一指、同桌之间相互说一说,以及用手来比划比划 1 厘米的长度;之后教师可以让学生结合生活中的物体,想一想、找一找身边大约 1 厘米长的物体,量一量,让学生在动手操作的时候直观感受到 1 厘米的长度概念,并建立起学生头脑中有关于 1 厘米的长度观念。

每位学生的知识背景不同,对新的数学概念接受能力、理解能力不同,教师在创设问题情境时需要注意以下几点:①向学生提供数学概念的现实背景,最好以贴近学生的生活实际素材为基础;②要创造良好的课堂氛围,将知识性与趣味性相结合,提高学生学习的积极性;③在进行教学活动时,要以学生的已有经验和认知水平为基础。④进行教学时要以学生为主体,提出适当的问题加以引导,向教学目标方向靠拢,提高课堂的效率。

#### 2.过程阶段 (Process)

<sup>①</sup> 李继超. 浅谈 APOS 理论在数学概念教学中的应用[J].成功(教育),2009(11):93.

过程阶段以活动阶段为基础,补充思考了上一阶段中教学活动的过程,学生通过在活动阶段的反复练习,也对数学概念有了一定的熟悉程度,通过自身思维回顾、构建、描述活动阶段,从而进一步挖掘出概念的最本质特征。过程阶段利用的是学生头脑自动化思考的特点,区别于活动阶段需要教师的引导,在过程阶段,学生可以不依赖外界,仅仅利用自身思维回顾模拟全部活动过程。例如,在进行分数的初步认识教学活动时,教师会指导学生亲自动手实践,通过折一折、涂一涂、比一比这一系列的过程,让学生初步感受几分之一。

很显然,过程阶段重在智力参与。由于学生的认知水平、基础知识以及智力水平都不一样,因此,对于相同的问题有不同层次的一个理解。但是,如果不断地重复这个过程,不断地进行自我反思,大部分学生能够在头脑中内化所学概念,形成一种知识“程序”,达到对数学概念的理解。这时学生不需要借助外部的刺激,而是进行自我思考。

### 3.对象阶段(Object)

“对象阶段”是利用形式化的定义和符号将本质特征的抽象性转化为具体、完整对象的过程。学生在过程阶段不断的重构活动过程后逐渐将过程阶段转化和凝聚为对象阶段。随着他们对概念的理解在这一阶段的加深,学生不仅仅能够辨析概念的本质属性,也能剔除干扰性因素,学生的思想中呈现出静态的结构关系,并且他们的头脑中不停地丰富并且不断完善所学的数学概念。通过把概念当作一个整体看待,学生可以更轻松地理解整个数学概念的基本特征。比如,学生在学习小数部分的课程时,需要明白它的意义和性质,而老师在教学的活动阶段通常会提出以下问题供学生思考:在数轴对应位置标注小数的值,标注并比较 0.2 和 0.20 的相似与区别之处,2 和 2.00 的相似与区别之处,引发学生思考。如何通过数轴这一形象的工具将代数与几何相结合,学生可以通过比较小数在数轴上标注的对应点的位置来快速地比较小数之间的大小关系,认识到一位小数和两位小数虽然大小相同,但表示的含义有所区别。如 0.2 表示两个十分之一,而 0.20 表示二十个百分之一。学生理解之后,老师可趁热打铁继续提问:2 可以用多少种小数来表示呢?这些小数的大小和含义有什么相同和不同之处呢?引发学生直观感受分数现象,深层次理解小数基本性质,通过变与不变的过程,提高学生思考和解决问题的能力。

数学概念的本质特征是由过程到对象的形成,是一个层层递进而困难的建构过程。这个过程中,不仅需要老师的悉心指导,同时也需要学生进行不断地概括、抽象,直到把所学的数学概念的本质真正掌握为止。学生现在对“对象”的认识还是孤立的,还必须要新的活动中进行新的概括、总结。



#### 4.图式阶段 (Schema)

“图式阶段”通过对上述阶段进行归纳、总结建立联系,以知识图式的形式,全面展示数学概念教学,将该图式整合到一个人的认知中,并且利用一个人的现有知识经验来建立一种新的思维关系。例如,在进行“用字母表示数”教学活动时,教师可以通过三次提问过程,提高学生思维辨析能力。第一步,是针对同一个对象,两个不同品牌的足球的价格能够用什么字母表示?让学生在思考这一问题的过程中,理解可以用字母代表数,并且它们之间的大小关系是无法比较的。第二步,在不同字母表示不同数的基础上,引申出用字母式表示同一个数字。让学生比较发现这两者表示数时之间的关联,比较两者的差异性和相关性,字母式可以同时表示数量和数量之间的关系,因此可以将数量关系用字母式来进行表示。第三步,是表示方式的不同,反复比较不同品牌足球价格之间的关系并用字母式表示价格,对表达形式不同的字母式进行讨论和比较,进一步强化学生对用字母表示数的本质的理解。

学生将在此阶段继续加深概念的学习。随着他们认知经验的积累,学生能够对自身的认知结构做出不断地调整。学生能够通过内化和适应新的知识模式来建立新的平衡,学生通过强理解数学概念,能够与自身的知识经验基础,包括相关的数学概念、公式和定理联系起来。在这种自身数学概念不断构建的过程中,学生的思维和认知水平有了提高,对相关数学概念的处理和精神表达也达到了更高的水平。

学生数学概念的学习从心理学的角度来看,思维活动的过程是对这四个阶段的反映。APOS理论的四阶段模型,不仅仅说明了学生要真正掌握知识是需要经历自己主动建构知识的过程,而且也指明了建构的层次,说明这四个阶段既紧密联系又层层递进,是一个循序渐进并到达图式的一个过程。但是,图式的形成也不是直接的,是需要学生自己长期的练习,主动建构的。在学生的认知体系中,学生学习数学概念要经过活动、过程、对象阶段,最后形成一个新的图式。学生经历的这四个过程如下图 2-1 所示:

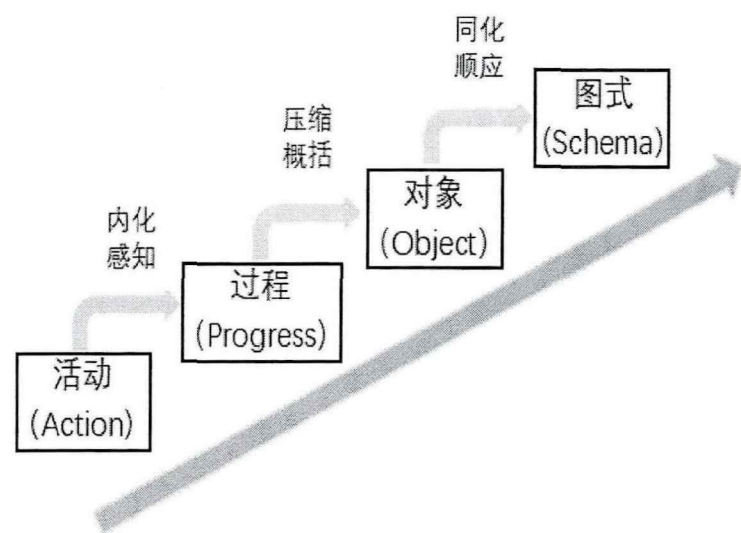


图2-1 APOS理论四个阶段模型

四个阶段是循序渐进、上升的一个过程，但是学生在学习数学概念时，不是只靠教师的讲授来掌握，学习新的有关概念知识这意味着学生自己需要经历学习数学概念的迭代过程，不断地完善自我，最终形成一个对所学数学概念完整而清晰的“对象”。用简练的符号表达或语言表述数学概念，最后，学生会将其与自身的数学认知结构相结合，内在化为自己的知识经验，直到学生真正理解、掌握变成自身知识为止。APOS理论的概念学习循环如下图2-2所示：

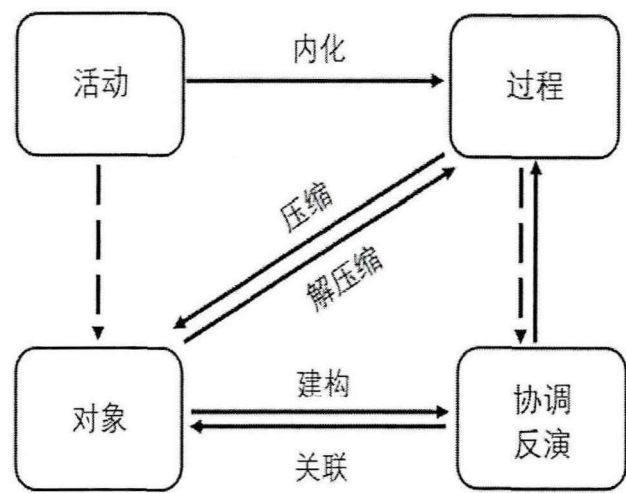


图2-2 APOS理论概念学习循环图

## 二、APOS 理论视角下教学设计的主要任务与框架

### （一）教学设计的主要任务

“用字母表示数”是数与代数领域的教学内容，所设计的教学环节要与学生现实生活相联系，通过学生动手操作活动和探究活动来促进、理解所学的相关数学概念。

从以下的三个环节来展开教学设计的工作：

第一个环节是现状调查，现状调查包括以下几个问题：①学生理解数学概念的困难之处；②学生的这些难点、痛点如何帮助教师形成对“用字母表示数”的教学反思。首先，针对小学生“用字母表示数”的概念理解的现状进行一个前期问卷调查，从这个前期调查中，可以反映出小学生在这个数学概念学习中所存在的问题，之后利用 APOS 理论对其存在的问题加以分析、总结，并对小学生已经掌握的知识进行一个判断，把握教学的关键和重难点，并且概括得出结论。其次，要从以学生为主体的角度探究和研究教学设计，保证在 APOS 理论框架指导下的教学意义，在实际教学过程中有良好的应用性。

第二个环节是教学设计。“用字母表示数”的教学设计包括：①以 APOS 理论进行“用字母表示数”教学设计。②针对“用字母表示数”的内容设计合适的教学案例。将前期调查和课堂观察相结合，以“用字母表示数”为例，探究分析教学设计在过程中如何运用 APOS 理论。在这一理论指导下，“用字母表示数”的教学设计要能够促进小学生对用字母表示数这个数学概念的理解。进行教学设计的步骤有：确定本节课的课堂目标；挑选合适的教学内容；设计教学过程；调查教学评价。

第三个环节是反思。在 APOS 理论的视角下，根据对“用字母表示数”这一课时的教学设计进行反思。根据 APOS 理论的四个阶段嵌入到教学过程中的应用结果来进行反思、思考，以便可以不断地改进教学环节，形成一份可实行的、完善的教学设计，进而帮助其提升小学数学概念教学的质量。

### （二）教学设计的基本框架

APOS 理论视角下“用字母表示数”的教学设计框架图如下所示：

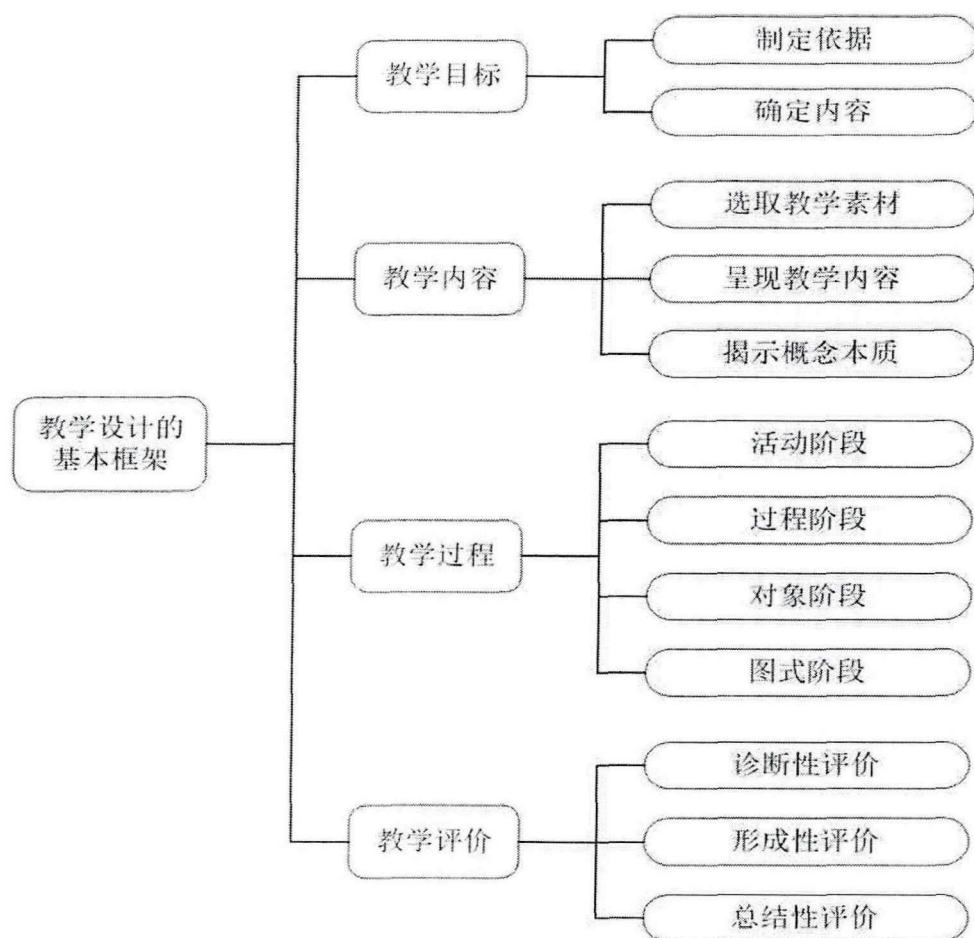


图2-3 教学设计框架图

## 第二章 小学数学“用字母表示数”教学设计的前期分析

### 一、学生学习用字母表示数的前期调查分析

#### （一）调查对象的选择

考虑到研究对象学生的智力发展水平和思维发展能力，抽象化的概念更适合高年级学生学习，因此选择了扬州市 Y 小学五年级某班级的学生实施问卷调查。该小学的教学水平处于扬州市所有小学中中等水平，五年级一共有六个班，每个班平均有 50 人。被调查班级的总人数为 51 人，收集数据并整理、分析数据，结合课堂观察等进行分析。

#### （二）调查问卷的设计

问卷题目的设定是为了了解五年级学生的用字母表示数的经验基础的状况，了解学生思维的认知发展水平。调查题目的编制符合五年级学生基本知识经验的素材，对学生学习数学概念的思维活动过程进行全方位呈现。问卷部分题目答案不唯一，根据学生的理解程度和表达出的想法评估学生在学习用字母表示数前的一个现有水平。在 APOS 理论视角下，满足新课标的要求，将用字母表示数的知识点划分成活动、过程、对象、图式这四个阶段。活动阶段，学生要对用字母表示数有一个基本了解，明白字母可以表示数；过程阶段，学生要学会用字母表示具体的数字；对象阶段，学生要学会用字母表示数列式和数量计算公式；在图式阶段，主要是学生对用字母表示数的理解和认知。具体情况如表 3-1 所示：

表 3-1 用字母表示数概念的调查前测卷明细

阶段	测试的知识点	题号
活动阶段	用字母可以表示数	1
过程阶段	字母可以表示一个具体的数	2
对象阶段	字母可以表示简单的数量关系和计算公式	3、4
图式阶段	学生对用字母表示数的认知	5

### (三) 调查的结果分析

在题 1 “字母可不可以表示数”中, 有 82.4% 的学生觉得用字母可以表示数, 有 15.7% 的学生觉得字母不可以表示数, 1.9% 的学生选择了不清楚。

题 2 是小明步行  $a$  千米到达学校, 这里的“ $a$ ”表示什么? 学生出现了以下几种答案: 第一种“ $a$ ”表示的是小明到学校的路程; 第二种“ $a$ ”表示数字; 第三种直接写出了“ $a$ ”表示具体的几千米。第二问“ $a$ ”表示的数有多少, 有 39.2% 的学生写出“ $a$ ”表示的数有无数个, 有 43.1% 的学生写了具体有多少个, 17.7% 的学生没有作答。

题 3 小红的年龄是  $a$  岁, 小芳的年龄是  $a+3$  岁, 谁的年龄大。有 92.2% 的学生直接写出了小芳年龄大; 有 7.8% 的学生将具体的数值带入, 进行比较得出小芳的年龄大。

题 4 中, 一个边长为  $a$  的正方形, 如果正方形的周长和面积用  $a$  来表示, 写出它们的表达式。正方形的周长和面积公式, 在三年级下学期学生已经学过这个知识点, 有 9.8% 的学生直接回答的不能或不可以; 有 23.5% 的学生用具体的值分别算出正方形的周长和面积; 有 9.8% 的学生虽然用含有字母  $a$  的式子表示, 但是他们不清楚正方形的周长和面积公式, 表述直接错误。有 52.9% 的学生可以写出正方形的周长是  $4 \times a$ , 面积是  $a \times a$ , 其中极少部分学生知道这两个式子可以简写, 写出了  $4 \times a = 4a$ ,  $a \times a = a^2$ , 有些学生认为  $a \times a = 2a$ , 还有些学生等号后面写了不同的字母, 比如:  $a \times a = b$ 。还有的学生直接在等号后面打了问号, 表示自己不清楚后面继续等于什么。有 4% 的学生直接写出了周长是  $b$ , 面积是  $c$ 。

第 5 题要求学生从数量的角度来看, 用字母表示数有什么特点? 和以前学过具体的数有什么不同? 从第 5 题可以看出, 大部分学生不清楚用字母的特点或者回答了没有什么不同; 还有些学生表示有不同, 但是还没有学习过; 极少部分学生能够回答出“字母可以表示不同的数”。学生对于“用字母表示数”的概念学习有知识上和情感上的需要。

通常倾向于形式化和符号化是数学概念的表达, 相比于普通的概念, 数学概念有较高的抽象度。在现实的教学过程中, 教师利用学生生活中熟悉的问题来帮助他们学习和理解用字母表示数这个概念, 能使學生充分体验到使用字母表示数的抽象过程。

### (四) 调查结果对教学设计的启示

教师在进行前期课程设计和课程实际教学的过程中, 可以参考和利用调查问卷的

结果,为了便于学生理解和记忆用字母表示数课程的重难点和目标,教师在进行前期教学设计过程中应该考虑以下几个方面:

第一,教师要按照小学生的认知发展规律来进行教学设计,这样才能够顺利促进学生对所学数学概念认知上的提升。首先,教师要设法让学生理解字母可以表示特定的未知的量,字母仅仅是一个符号,不同的字母也可以表示相同的数。小学生刚将讲字母表示变化的数的概念教授给学生,让学生明白用字母表示数不仅仅是因为字母可以表示不同的数,而是因为一个不确定的数可能会不断的变化,用字母可以描述这个数的变化。

第二,教师可以结合小学生当前已有的认知水平和生活经验来进行教学设计。如选取学生的生活经历和生活中常发生的现象作为案例,使得学生可以具体体会在生活中理字母的意义,消除对字母的陌生感,从给定的量引伸到变化的量,从算数思维慢慢进步到代数思维。从算术思维一步步成长为代数思维的过程,学习用字母表示数只是基础,小学生还需要在这个基础上通过观察和理解现实生活,从而实现观念的转变,熟悉的生活情境可以消除学生的陌生感。小学生在直观的认识了“用字母表示数”这一数学概念后,概念的层层抽象凝化也离不开实例的帮助。教师如果根据现实生活意义来阐述这个代数式的含义,这样会让学生更好的理解“用字母表示数”的深层内涵。

第三,教师要在教学过程有意识的培养学生的主观能动性,让学生积极主动地经历这一完整的抽象过程;以亲身经历感受用字母表示的优越性、简洁性和必要性,让他们用心体会字母在数学中和生活中的意义和价值。从简单到困难,从引导到独立,教会学生养成用字母表示数的解题思路,不断提高思维对符号的认识。学生只有从内心认同新思维方式存在的意义和价值,才会积极地使用字母解决问题,发展符号意识。

第四,教师要设计适当的情境,让学生理解并能应用“用字母表示数”概念的二重性。小学生只有掌握了概念的二重性,将其看成是一个对象,才有可能进行数量关系的思考,从而真正理解含有字母的算式含义。

## 二、学习需求分析

学习需求分析是教学设计的一个起点,要为整个设计活动系统选择一个适宜的活动主题——教学中所要解决的核心问题。<sup>①</sup>学习需求是指学生在当前学习水平的基础上

<sup>①</sup> 王光明,康玥媛.小学数学教学设计[M].北京:教育科学出版社,2014.120.

进一步提高为更高水平的心理期待。现有学习能力与想要达到的学习能力存在一定距离,这段距离可以通过学习需要来消除。对学生的学习需要进行整理和研究,可以让教师更好的掌握学生现有的学习能力和掌握的知识内容。分析学习需要挖掘学生现有知识体系中的不正确之处,分析产生这些误区的原因,整理分析后以此为基础编写教学设计,寻找合适的方式和方法,引导学生在学习知识的过程中解决这些问题。合理的研究和分析学习需要,能够更有针对性的制定学习目标,从而有针对性的进行教学设计,便于学生学习和教师教学。

为了让学生明白学习需要的必要性,教师要在教学过程有意识地培养学生的学习习惯,适当的鼓励和表扬可以提高学生的积极主动性,尽管鼓励和培养自信是必要的,但为了让学生产生学习需要,教师需要营造紧张氛围,让学生明白自己现有知识的匮乏性,当学生在这种紧张氛围中感受到自身知识的不足时,才能激发心底的学习动力。在这一过程当中,教师可以适当地采用外部刺激的方式刺激学生。

通过以上的调查分析可知,学生对于“用字母表示数”的概念是不很清晰甚至是错误的,生活中很多用字母表示的具体事物只能让学生感受到字母可以表示数,并不能深刻的产生认识。小学生仅仅停留在用字母来替代数,只是表面上懂它的意思,少部分学生可以理解用字母表示未知数,表示一个固定的数,但是面对字母表示变化中的数时产生理解障碍。学生并不能真正理解含有字母式子的二重性,字母式子也可以表示对象或结果。

小学生在认知过程中,符号代数的抽象性与算术运算的具体性产生了冲突,出现了负迁移效应,因此对于小学生来说理解字母的意义是相对困难的。教师要在课堂教学中要充分调动学生的积极性和主动性,激发学生学习的兴趣,成功实现从算术思维向代数思维的跨越。“用字母表示数”不仅仅是数学中学生所要学习的内容,也与我们的生产生活密切联系,因此学生学习用字母表示数是很有必要的。

### 三、学习者分析

学习者分析即我们平常所说的“备学生”。教师要为教学设计确定合适的主体对象。教学活动和学习活动的主体均是小学生,教学设计的目的是为了让小学生能够学到知识,因此教师在进行教学设计之前需要对小学生的学习习惯和全体特征有一个全面的调查。在学习角度,小学生的特征主要体现在学习起点,思维特征和自我调节能力这



三个方面。<sup>①</sup>

对学生的前期调查分析是为了了解学生的学习现状,包括现有知识的状态和感情上的状态,了解学生现状可以帮助教师制定教学目标,组织内容框架,选取教学案例,优化资源配置等方面提供依据,进而帮助学生学习和提高能力,分析学生状态是教学设计的重要一环,其根本目的是激励学生用正确的方法学习,分析和了解学生的放松状态,最能够观察出学生是否达到了要求。小学生具有群体共性和个体差异性,这些独特的个人特点融入到了他们的学习过程中。因此,在有效地进行教学设计之前,不能缺少对学习特征的分析。<sup>②</sup>

### (一) 学习者的学习起点分析

学习者的学习起点是设计“学习准备活动”的主要依据。小学生在学习“用字母表示数”之前,学生已经学习过和掌握了的知识点对学习新内容产生巨大的影响,因此教学活动的开展需要教师考虑到学生现有的知识水平和能力。所有的教学活动设计,教师都要考虑学生能力能够接受的范围,来悉心引导学生解决所遇到的问题和困难。所以教学设计在被实施之前,教师需要明确他们的教育目标和学习者的开始状态。

在实际生活的应用中,小学生经常能够接触到用字母来表示具体的事物,比如,字母“KFC”就表示肯德基快餐、字母缩写“WC”就表示厕所、字母“UFO”就表示不明飞行物等等。在以前的低年级数学学习过程中,小学生其实已经使用字母来代表数字。比如,小学生在学习加法交换律的时候,字母 $a$ 、 $b$ 分别表示两个加数,加法交换律就可以表示为 $a+b=b+a$ 。但是,他们并没有理解用字母表示数的真正含义,仅仅是停留在字母是可以表示数的这一阶段。教学过程设计从小学生原有的认知经验基础出发,学习“用字母表示数”,发展学生的符号感,初步渗透代数的思想。

### (二) 学习者的思维特征分析

智力是指学生理解和认识这个客观世界并能够将生活经验和所学知识应用到实际问题的能力。智力的开发主要通过生活经验的积累和教学活动的开展,其中智力能力的差异性又反作用于教育活动,因此教育者在进行教育活动的过程中,要充分分析学习者现有的智力水平,因材施教。小学生的心理发展是迅速的,尤其智力和思维能力的

<sup>①</sup> 李开城,李文光.教学设计理论的新框架[J].中国电化教育,2001(6):6-8.

<sup>②</sup> 马兰,张文杰.教学设计[M].北京:高等教育出版社,2012.87.

发展。对学生进行学校的教育,要使所有学生都能取得适当的发展,同时考虑到我国传统教育的弊端,在传统教育中,教师注重知识的接受而忽视了对学生们能力的培养,如何保持和发展人格个性是教育中非常重要内容。成功智能理论和多元智能理论从学生之间的个体差异开始,而不是在智力水平差异上出发,这些理论可以为教师进行教学设计时提供帮助,也可以作为分析者分析内容的一部分。

小学生从学前教育到进入小学一年级以后,为了适应新环境,包括学习环境和课外实践活动等环节,这就需要小学生通过思维中的抽象部分去接触理解新的事物。根据皮亚杰的认知发展理论,这个年纪的小学生的思维能力是在具体形象阶段。随着数学知识的学习达到运算阶段,小学生需要培养一定的抽象思维能力和简单的逻辑能力来处理运算问题,但是深入思考的意识不足。学生虽然在四年级下学期就已经初步接触了用字母表示运算律,但还不能理解其本质。学生很难快速理解用字母表示数的本质,教学设计过程中教师要融汇贯通,将教材内容与学生现有的生活实践、思维能力以及学习积极性相结合,帮助小学生构建用字母表示数的概念。

### (三) 学习者的自我调节能力分析

通过观察教师不难发现小学生在这一期间的性格特征主要为贪玩、好动。由于小学生的年龄较小,并且对外部环境存在明显的依赖,有着较强的向师性,小学生在自我意识方面的认识也不高。因此,他们对外界的影响与暗示并没有自控力,上课时注意力会不集中,模仿他人错误的行为等等。小学生的这一特点也就需要教师在教学中,能够根据学生的年龄特征和身心发展规律,重视他们学习的积极性,适时对学生进行表扬,给学生创造一个相对轻松、愉悦的学习环境。在“用字母表示数”的学习中,学生可以通过活动游戏来探索数学活动问题。同时,在这一过程中教师可以积极发挥引导作用,根据小学生在这一年龄阶段表现出来的特点,帮助学生将生活经验转化为数学知识。教师还可以充分借助多媒体的课件展示,提高小学生的学习兴趣。

## 四、教学内容分析

“教学内容分析”并不是一个新鲜事物,它是新课程背景下“备教材”的延续和进一步发展。研究认为在进行课前准备时,教师应该重视系统的挑选和整理教学内容,在这一过程中教师要找准授课重点,明确授课目标,理清授课思路,安排授课时间,组

织课堂活动和权衡授课策略。对教学内容的合理整理,可以使教师内化对所教内容的理解,准确地把握教学内容的本质和逻辑结构等。为授课媒介和方法的选择提供一定的理论指导,教师要贴近教学内容,找准这部分内容的易错点和学生学习的重难点,并以此为基础构建课堂教学的阶梯,使得学生从基础开始,慢慢的向重难点靠近并且突破,而且这一过程符合传统教学的教学方式和顺序,是完成教学目标的重要依据和基础方法。

从具体到抽象,从简单到困难,从数字是数字,字母是字母到数字与字母产生关联,可以用字母表示数,从生活实践中的具体数量关系到用字母表示抽象的数量关系,经历了上述过程以后,学生的智力水平得到显著提升,思维水平也得到拓展。为学生今后的学习提供了基础能力,可以帮助学生更好的学习数学理论。本节课是苏教版小学数学五年级上册 99—100 页课程内容。课程目标主要为向学生传达用字母表示数的重要性,引起学生的重视,引导学生将形象的生活经历融入到用字母表示数的抽象概念中去,从而帮助学生学习 and 应用用字母表示数,用字母表示数量关系和运算含有字母的算式。用字母表示数是从形象化到抽象化的一次转变,是从生活实践到生活理论的提升,是从具体的事物到具体的数量,再到抽象的字母的一次跨越。学好用字母表示数,学生既可以回顾和强化对已有的纯数字的代数知识的认识,又可以在此基础上感受到数学化繁为简的神奇能力。用字母表示数可以培养小学生的符号意识,为小学生进一步学习运用代数知识打下基础。在教学过程中,教师要适当考虑小学生初次接触符号字母的陌生感和逃避心理,要给小学生一个适应的过程,如在编写教学内容的过程中,先从最简单的题目给学生一点鼓励和满足感,再根据小学生的身心发展规律,循循善诱、因材施教、层层递进。

在苏教版小学数学教材中,“用字母表示数”第一课时一共有三道例题。如表 3-2 所示。

表 3-2 苏版小学数学教材“用字母表示数”三道例题的具体内容分析

例题	教材内容	设计意图	字母代表的意义
例题 1	操作活动用小棒摆三角形，探究三角形和小棒两者在数量上存在怎样的关联，用文字和算式两种形式来表示。	1.从学生熟悉的三角形出发，消除学生的陌生感。学生通过动手操作、观察、归纳得出数量关系，分别采用文字描述和含字母的式子表示。 2.体会用字母表示数的简洁性，初步感受用字母表示数的优点。	用含有字母的式子表示数量和数量关系 ( $a$ 表示三角形的个数，需要小棒的根数表示为 $a \times 3$ )。
例题 2	已知一条公路全长为 280 千米，开车从路的一头出发，行驶一段距离后，如何用式子表示没走完的路程。	1.从实际路程问题出发，加深对用字母表示数的认识和应用。 2.学生能够写出含有字母的表达式。	用含有字母的式子表示数量和数量关系 ( $b$ 表示已经行驶的路程，剩下的千米数是 $280-b$ )。
例题 3	用含有字母的式子表示正方形的面积公式和周长公式；并介绍含有字母式子的书写方式。	1.引导学生复习回顾已学的知识，领悟用含有字母的式子表示运算计算公式的简便性和优越性。 2.引出平方的读法和写法， $a$ 与 1 相乘一般写作 $a$ 。	用字母表示正方形的周长公式和面积计算公式。( $C=a \times 4$ ; $S=a \times a$ )

例 1 操作活动用小棒摆三角形，探究三角形的个数和小棒的根数有什么关系，先用文字描述，再用一个式子来表示。教师先引导学生通过动手摆一摆，观察并且思考，根据所用的小棒根数，用乘法算式列出与三角形个数之间的关系；同学们通过摆一摆这个过程，他们能说出所用的小棒根数是三角形个数的三倍。这时，教师可以提出问题，问学生能否只能用一个式子表示出来这之间的关系，从而使学生认识到这里的字母  $a$  可以表示任何自然数，并且没有范围。这一题是学生初次接触字母表示不确定的数，以及写出含字母的简单表达式。

例 2 的解题思路与例 1 基本相同，先让学生理解路程关系问题的语言表达公式，再将题目中具体的数值替代公式中的语言部分，没有具体的数值来替代的语言部分，则用字母来表示，比如用字母  $b$  表示已经行驶的路程，指导学生在这一思路引导下，描述剩余路程的表达式。所列出的含有字母的式子，事实上不仅仅表示剩下的千米数，也体现了题目中数量之间的关系。与例 1 不一样的是，例题 2 中的字母所表示的数量有一定的约束条件，要求学生根据这些约束条件试着口头回答含有字母的算式的数量值，进而使得学生强化和加深对用字母表示数的印象和认知。

例 3 则是上面两题的基础上，通过字母来表示正方形的面积和周长公式，向学生

们展示了用字母描述的公式比文字描述的公式更加简便，学生由传统的将具体数字带入语言描述公式的方式转变为用含有字母的公式替换语言公式，再将具体的数字带入具体公式的解题方式。

通过对教材中的三个例题进行总结和分析：三个例题从三个层次层层递进，例题1是基础，通过例题1的学习教会学生运用字母描述基础的数量关系。例题2是延伸，虽然还是表示数量关系，但是在其中加入了生活经验部分，以生活实际对字母可以表示数的范围加以约束。例题3是第三层次，既要求学生学会用字母表示数和用字母表示数量关系，又要学生学会用字母表示计算公式。

苏教版课本上三道例题是由浅入深、由易到难，层层递进。首先，例题1所涉及的数量关系较为简单，从小学生熟悉的三角形的三条边入手，只含有一种运算法则，属于一步运算。例题2从实际生活中路程问题出发，从学生熟悉的情境入手，让学生经历由文字的表述过渡到用字母来表示数量关系，体会符号字母的简明性、概括性和抽象性，在文字表述繁琐的情况下让学生亲身体验到字母表示数的必要性。最后，例题3主要是要学生对用字母表示数的灵活应用，对已经学习过的正方形的面积和周长的计算公式，采用字母表示的方法来重新演绎、理解，感悟用字母来表示计算公式的简洁性和优越性。

对于新课程标准中的要求，笔者认为，在“用字母表示数”的教学过程中，教师要注意做到：

### 1.结合学生已有的认知水平和生活经验，让学生在快乐中学习数学

在进行教学时，由学生熟悉的扑克牌引出本节课的学习内容：用字母表示数，学生感到自然、亲切。整个教学过程应该围绕学生的实际生活经验设计趣味性和应用性兼备的问题，使得学生积极主动的将新知识融入问题、分析问题、组织问题和解决问题，使得抽象的、乏味的概念性内容因为贴近这一年龄段，小学生的兴趣反而变得充满趣味性。原本比较枯燥的教学内容因为教师所创设的情境变得十分生动，学生在学习新知的同时，也感受到生活中处处有数学，体验到数学的魅力与价值。

### 2.注重教学思想的渗透

数学思想是小学数学知识的灵魂，也是数学“四基”的重要组成。“用字母表示数”这节课是小学数学教学中渗透数学思想的良好载体。这节课至少隐含着抽象思想、归纳思想、符号化思想与函数思想这四种思想。数学思想的渗透，不仅有利于学生理解本节课的教学内容，也为学生的进一步学习做好铺垫。

### 3.将学生思维从算数层次提升到代数层次

小学最初的思维是社会环节给予的语言思维，进入小学后，最先开始接触的是以具体数字为主的算数思维，随着年龄的增长和数学思维的拓展，单纯的算数思维不再能够满足学习需要，此时需要将算数思维提升为代数思维，这一过程的难易程度因人而异，对于基础良好，思维具有跳跃性的学生而言，这一过程显得水到渠成，而对于大多数普通同学而言，这一过程普遍存在困难。对于小学生来说，在以前的数学学习中，虽然孕伏着代数思维内容，但是毋庸置疑的是“用字母表示数”将是小学数学中代数思维的显性的开始。整个教学过程既是小学生新知识的学习过程，也是学生由原来的算术思维水平向代数思维水平迈进的过程。

### 第三章 APOS 理论视角下“用字母表示数”教学设计的环节

基于 APOS 理论下的“用字母表示数”的数学概念教学设计,要根据数学概念的基本属性和特质,巧妙地运用在教学设计的各个方面,教师对于数学概念的课堂讲解是学生理解和学习数学概念的主要途径,引导学生构建抽象的数学概念框架,提升学生的抽象思维发展能力,并引导学生利用这种思维能力在数学概念框架中添砖加瓦,进而产生具体的图式框架,以便于掌握和运用数学概念,让课堂教学成为学生数学概念学习的重要途径,培养学生自主构建抽象思维体系,使学生产生概念认知,形成图式结构。

#### 一、教学目标的设计

这里所说的教学目标特指“课时教学目标”。它是教学设计的核心,是教学活动的出发点,也是教学活动效果评价的落脚点。这方面的目标具体而细微,集中在详细的学习内容、处理细节,在课堂教学中,产生来显著的益处。因此又称为微观目标。数学概念的教学目标的主要特质表现为形象化、应用性、可检测。

##### (一) 制定教学目标的依据

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中提出以下要求:在数学课程中,要注重发展学生的符号意识。<sup>①</sup>通过了解和学习符号后,学生明白符号和数学之间存在的并列关系,可以利用符号来描述一个具体的或变化的数。符号意识就是用符号取代传统的观念中的数字,如现有的知识体系中,将具体的数字带入数量关系,求解应用问题,符号意识,即将符号带入数量关系进行计算,并且符号可以总结数字的变化规律,从而形成用符号表示的数学公式。课程标准对于学生学习“用字母表示数”有着明确的要求。

新课标“数与代数”领域中总的要求是:1.学生能够用符号描述生活常见的数量关系和应用场景;2.学生理解并应用符号描述数量关系和规律;3.学生具备在字母表示数量关系和数字表示数量关系之间转换的能力;4.学生要学会应用所学的符号表示的数量

<sup>①</sup> 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012.

关系和规律。无论是总目标还是具体到每一学段的目标，都具有将抽象化转化为形象化的过程，学生应该具备能力理解并应用用字母和符号所表示的数量关系和变化规律。

## （二）确定教学目标的内容

“用字母表示数”的教学设计要求老师确定适合学生成长发展的教学目标，但根据学生的个体差异，老师要鼓励学生思考和探索，需要选择不同的方法进行教学。因此，这节课的教学目标是由学生的身心发展水平和教育要求以及结合 APOS 理论四个阶段来决定。所以确定了以下的教学目标：

1.活动阶段，学生对概念有初步的认识，知道字母能表示数，字母式可以表示数量关系。

2.过程阶段，学生能够有一个初步应用能力，能够用包含字母的算式表示数与数之间的关系和简单的数学公式。

3.对象阶段，学生完整地学习了用字母表示数，体验了抽象思维思考问题的过程，初步认识到字母表示数和算式、公式等是数学的重要组成部分，体会到用字母表示数具有化多为少、化繁为简的能力，算数思维逐步向代数思维转化。

4.图式阶段，学生通过体会用字母表示数的简洁性和便捷性以后，初步明白为什么在数学理论研究当中需要用到用字母表示数、数量关系、公式等等，并从中领悟到学习数学的特点和意义，引发学生学习兴趣，培养学生主动探索新领域，积极发现问题，并利用抽象思维解决问题的学习习惯。

## 二、教学内容的设计

所有方式的教学都是围绕特定的活动内容。在教学过程中，学生生活实际和学生的活动都可以是教学内容，但小学生的教学内容主要还是课本中的知识。

### （一）贴近学生认知和生活选取教学素材

在教学过程中，教师要让课堂变得具有趣味性，引导学生主动积极地思考问题以及解决问题。教师在挑选教学内容时，要充分考虑学生的实际生活经验。<sup>①</sup>例如，在苏

<sup>①</sup> 李松林,巴登尼玛.新课程教学设计原理与方法[M].北京:人民教育出版社,2014.46.



教版的小学数学教材中，例题一选择了与三角形三条边相关的知识，如图 4-1 所示。

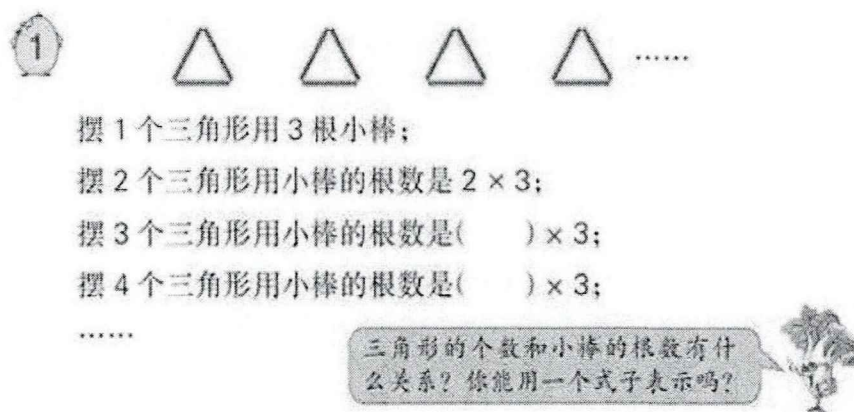


图4-1 苏教版教材“用字母表示数”例题1

小棒游戏是小学生的童年课间活动之一，从学生感兴趣的课外活动出发，探索用小棒摆出的三角形的个数，和需要小棒之间的关系，进而引导学生可以用含有字母的式子去表示两者之间的关系。既联系了学生以前所学过的数学知识，也与学生的生活实际和动手操作相联系。教师需要沟通教学内容与学生已有知识经验的联系，知识和经验可以使学生更好的理解所学习的概念，能够使概念的抽象变得直观，进而能够引导学生去探索分析、解决实际的数学问题，培养学生会应用所学知识和分析、解决问题的能力。

## （二）依据逻辑与规律呈现教学内容

教师在进行教学内容挑选的过程中，既要满足教材中体现出来的数学逻辑，又要充分考虑到小学生现有的认知水平和智力发展规律，将学术性数学知识转化为可以用于小学生课堂教学的教育性知识。教育内容要做到以下几点：第一，能够将抽象的数学概念转化为具体的学生能够理解的数学概念；第二，能够通过教学让学生理解数学概念并用数学概念解决实际生活中的问题，在这一过程中，APOS 理论中的形成数学概念的顺序和方式需要被充分考虑进去，按照活动、过程、对象、图式的顺序，选择相对应的教学内容，层层递进，让小学生学习过程中的思维更有层次感，从而更好的理解数学概念。

## （三）结合实际活动与抽象概括揭示概念本质

学习数学知识是一个主动探索、构建学生自己的知识体系的过程。学生要有自主

的思维想法,再在这个思维水平和现有的知识框架基础上认识和了解数学概念。通过自身思考,将抽象概念转化成自己可以理解的知识。APOS 理论就是指导教师通过四个阶段的教学和教学过程,以学生现有的生活经验结合数学概念知识,借助于生活实际情境经验,营造趣味性的课堂氛围。选取合适的教学活动,剖析数学概念的知识框架,从而引导学生积极主动的构建数学思维这一抽象概念的框架。

教师通过课前教学设计以及课堂上的教学内容。帮助学生将生活经验形态转化为数学知识形态。在这一过程中,教师需要注意以下几点。第一,数学概念的教学内容一定是以学生现有的知识水平和生活经验水平作为基础构建的。APOS 理论中明确指出,教师应当结合学生实际现状,分析教材内容的特点。在这一过程中观察学生的学习和发展情况,从而有针对性的进行教学设计。尽可能的营造轻松愉悦和有趣的课堂氛围,让学生积极主动的自觉探索数学概念性知识。通过向同学展示数学概念的实用性,激发学生内心学习的欲望。APOS 理论要求教师以学生作为教学的中心。教师的主要任务是组织学生学习,引导学生求知。另外,在进行课堂教学的过程中,也要摆脱传统的以教师为主导地位的方式。学生要亲自参与到他们从接触知识到学习发展,以及形成他们自己的知识理论框架的过程中去。在这一过程中,学生能够更好地感受体验和深层次的挖掘数学理论知识概念。最终呈现出来的效果优于传统的教师填压性教学。学生能够将知识理解成自身生活中可以应用到的范围内,从而使得概念型知识更加具有实用性。

### 三、教学过程的设计

教学设计的目的旨在提高学生的积极性和主动性。贴近教材中的教学内容,结合学生的生活实际。让学生了解,学习和认识到数学概念的知识。通过自身实际生活经验构建自己的抽象思维逻辑体系。教师引导学生完成这一教学过程中的教学任务。对于学生整个小学数学生涯的过程来说,设计教学过程的目的是为了让学生明白数学的趣味性和实用性,从而激发他们的学习兴趣。培养学生的符号意识和抽象思维能力。APOS 理论应用于数学概念教学最根本原因是利用了 APOS 理论的阶段性。依据 APOS 理论活动、过程、对象、图式四个阶段的指导来设计教学活动可以形成有效的教学模式。在用字母表示数的教学设计中,教师应当依据 APOS 理论将教学设计分为四个阶段,并在某一个阶段中考虑到 APOS 理论如何应用于这一阶段。在考虑阶段性的同时也要兼顾理论的整体性,要考虑到每个阶段之间对于整体的重要性和每个阶段之间的联系,

弄清楚每个阶段是如何服务于整体目标的。在整体目标的逻辑框架下，理清四个阶段之间的顺序，从而形成一个整体，确保教学过程的完整性、过程性和有效性。通过教学过程的设计更好的完成教学目标。

## （一）导入环节的设计

1.教师带来了学生熟悉的扑克牌，以玩游戏作为本节课的开始，请同学们上来抽取一张扑克牌，看看哪位同学抽到的数字大。（有的学生抽到了带字母的扑克牌）

2.教师提问：在扑克牌中，人们用特定的字母表示数，字母分别表示了哪几个数？

【设计意图】数学概念的形成，最初要经历从直观到抽象的活动过程。APOS 理论用于数学概念教学的第一阶段，学生在这一阶段通过活动对数学概念有一个初步的认识。

活动阶段，教师以学生生活中感兴趣的活动作为切入口。通过游戏的方式，引导和激发学生学习数学概念的兴趣。将学生生活中的实践经验和数学概念相结合，让学生明白通过数学概念的学习可以应用于生活实践中去，并通过引导学生提出生活实践中的问题。将这些问题与数学概念相结合，观察通过数学概念的学习能否解决这些生活实践问题，从而让学生明白通过学习数学概念这一知识，能够在生活中有用处，从而激发学生的学习热情和深度学习的想法。

## （二）新授环节的设计

1.通过拼摆三角形，为探索用字母表示“变化的数”作铺垫。

2.教师提问：如果有足够多的小棒，我们继续玩这个游戏，在课桌上摆三角形，那么摆出来的三角形的个数和用去的小棒的个数之间有什么关系？你们能不能发现什么规律？可不可以用一个字母来表示三角形的个数？那么又如何通过这个字母来表示小棒的数目呢？

【设计意图】当重复的玩这一个用小棒摆三角形的游戏以后，学生的操作也会更加熟练，学生的思维也会像搭积木形成肌肉记忆一样，形成一个思维记忆。用多少的小棒来搭多少个三角形，它们之间存在怎样的关系？这一思维记忆就是数学概念中的抽象思维。这时候如果老师继续让学生玩这个用小棒摆三角形的游戏，学生可以不用通过手动摆出具体的三角形的个数和小棒的个数，而是通过在大脑中实施这一摆小棒的过程就可以知道两者的关系，并思考当小棒无限多的时候，小棒和三角形之间存在

一个关系，存在着的这个关系就是引发学生思考数学规律的最好的过程。教师应当带着学生这一疑惑引导学生通过独立思考、小组讨论的方式来进行研讨，从而体会到用字母表示数的概括性和简洁性。

### （三）巩固环节的设计

1. 通过游戏明白字母和数字之间存在一定的关系，字母和数字是可以同时存在形成字母式，如“神奇魔盒”这一数学游戏。

2. 一条公路长 280km，一辆汽车从公路的一端开始行驶，用合适的式子来表示汽车已行驶的路程和未行驶的路程。

3. 正方形的周长和面积公式如何通过字母的式子来表示？

4. 乘号和字母同时出现时，可略写计算符号。

(1)  $a \times 4 = 4 \cdot a = 4a$ 。

(2)  $a \times a$  可以简写成  $a \cdot a$ ，也可以写成  $a^2$ ，读作： $a$  的平方。

(3) 如果  $a$  和 1 相乘，可以省略 1 和乘号，直接写成  $a$ 。

【设计意图】当学生初步了解了字母式有了一个初印象，神奇魔盒的模式，本质是一个数学映射的过程，是学生学习函数的思维基础。学生通过了解了几次魔盒的变化过程以后，会尝试着通过已有的数学运算方法总结规律。这一过程是利用思维中的抽象思维能力，在大脑中做的自然模拟。通过思考和学生之间的互相讨论，学生可以用语言来表示魔盒与数字之间的关系。在这时候，教师需要适当的引导学生，将字母的概念引入到魔盒中去，通过字母式来表示进出魔盒的数字之间的关系，并揭露字母表示数量关系的本质和形成过程。在利用学生数学的路程问题作为案例，来让学生明白，字母是不仅可以用于“魔盒游戏”，更可以用于生活实践中实际问题的解决。

对象阶段描述的是字母式的形成形式。教学过程进行到对象阶段时。学生已经初步会使用字母表示数和用含有字母的式子来描述数量关系。初步形成了符号思维，从生活实践到数学理论已经慢慢的在学生的思维中起到了渗透作用，使得学生在对象阶段能够深层次的加深对用字母表示数这一概念的理解。

### （四）练习环节的设计

1. 省略乘号，写出下面各式。

$4 \times b$      $x \times 5$      $a \times c$      $1 \times x$      $x \times x$

2.判断下面各题是否正确，正确的打“√”，错误的打“×”。

(1)  $5 \times b$  和  $b \times 5$  都可以写成  $5b$ 。( )

(2)  $8 + a$  可以写成  $8a$ 。( )

(3)  $c \times c$  可以写成  $2c$ 。( )

3.根据“妈妈比玲玲大 28 岁”填写下表。

玲玲/岁	1	2	3	4	...	$a$
妈妈/岁	$1+28$				...	

如果  $a=10$ ，妈妈多少岁？如果  $a=15$  呢？

4.在括号里填写含有字母的式子。

(1) 一支铅笔  $a$  元，一支钢笔比铅笔贵 5 元，一支钢笔( )元。

(2) 小新每天读故事书 20 页， $a$  天看了( )页。

(3) 一辆公共汽车上原来有 20 人，到花园小区站下去了  $x$  人，又上来了  $y$  人。

现在车上有( )人。

5.结合实际说一说生活中运用字母式的例子。(如：一张电影票的价格是 25 元， $x$  个人买票需要花  $25x$  元。)

【设计意图】对象阶段学生获得并增强了对用字母表示数的理解。前面两道练习题在提供了对正面案例的反馈之后，然后再设计对反面案例的分析。比较正面和反面的例子可以帮助学生更好地理解规则以及概念，并增强他们对结构化对象中字母式子的理解。这个题目的难度达到了图式阶段。在这个阶段，学生已经能够用思维建立相对完整的用字母表示算式的概念，同时这个题目又联系了生活实际，是对活动阶段的一个很好回顾。理论应用于实际，这一过程，能够强化学生对数学概念的认知，并且通过模型的建立，能够提高学生的思维水平和构建完整的数学概念的知识体系。

## 四、教学评价的设计

教学评价是小学数学教学设计的重要组成部分。教学评价是指在教学过程中灵活地对学生的学习状态进行价值判断。教学评价具有过程性，区别于考试的最终性。教学评价是教学设计的重要环节，及时对教学设计做出反馈。<sup>①</sup>

根据作用机理的差异性，教学评价分为诊断性评价、形成性评价和总结性评价。

<sup>①</sup>王光明, 康玥媛. 小学数学教学设计[M].北京:教育科学出版社,2014.100.

## （一）诊断性评价的设计

学生学情的基础调查是进行教学设计的重要前提条件。通过调查问卷的形式来了解学生对用字母表示数概念的了解程度。调查问卷的设计内容主要考察学生的现有知识体系水平以及生活中的情感表达能力。通过调查问卷评价学生学习用字母表示数的适应性和在学习数学概念过程中可能遇到的难题，如何根据学生现有的年龄特征应对，并且提出有助于学生理解概念的帮助和支持。例如，学生有没有在生活中见过字母可以表示数；在这一层次之上，调查学生是否知道可以用字母表示算式和数学公式。教师在进行设计教学前了解学生的这些情况，有助于教师更准确的把握教学的内容，以及对本节课的重难点的把握。诊断性评价的目的是为教学决策提供有力的依据，辅助教师选择正确的教学方法来挑选合适的教学内容，从而实现对症下药。

## （二）形成性评价的设计

形成性评价能够更好地改进教学过程，强化学生的学习，为学生的学习定步，提高教学的质量。基于 APOS 理论，对“用字母表示数”在教学过程中如何合理运用这四个阶段来进行教学内容设计，从理论上说明 APOS 理论四个阶段原理与数学概念教学相吻合，要在教学过程中时刻观察学生的表现，作为自己教学效果的呈现，及时发现学生在学习过程中遇到的问题，适时调整教学方式和教学内容来提高教学效果，并在此基础上控制好教学的速度。最后，教师要总结这四个阶段过程中的教学效果，进行课后反思。在此基础上回顾和重新模拟学生的学习过程，对学生完成这一阶段的目标和任务进行一个阶段性总结，并对学生的学习情况做一个总的评价。

## （三）总结性评价的设计

在学生学习后，教师可以通过练习题，看学生是否理解、掌握了所学概念，是否可以应用所学概念，是否完成了概念的图式阶段。总评可以用于评价学生的思维能力和智力水平，从而作为学生在学习之后数学知识的基础支撑和学习起点，为后续学习工作的展开提供因材施教中的材。总结性评价不光是对学生的能力进行一个总的反馈，更重要的是起到了激励学生学习的作用。

## 第四章 APOS 理论视角下“用字母表示数”的教学实施与效果分析

### 一、APOS 理论视角下“用字母表示数”教学实施的设计

APOS 理论包含活动、过程、对象、图式四个阶段,通过 APOS 理论对课程教学进行合理分配,并将 APOS 理论视角下“用字母表示数”的教学设计转化成教案。实施对象还是扬州市 Y 小学五年级的一个班级,在经历问卷调查的后一天进行课堂教学。本次课堂教学在自然状态下,采用视频录课的方式记录课堂活动。在练习应用阶段,课堂练习以作业纸的形式发放给学生。课后,根据课堂实录整理教学过程,对此进行课堂效果的分析。

### 二、APOS 理论视角下“用字母表示数”教学的实施

教师要结合课程内容和学生的实际生活兴趣点,详细了解学生的生活实践、动手能力和思维水平能力。在此基础上因材施教,在具体的课堂实施过程当中,教师要营造一些有利于教学的氛围,如符合小学生好动的脾气的趣味性课堂,以学生为主人翁的特色课堂,以合作交流为主的实践性课堂,学生可以针对其自身性格做出合理选择,在这一系列的数学活动当中找到自己的合适的学习方式,提升自我学习的兴趣,从而学习和掌握数学知识,提高自身智力水平。培养学生的抽象化思维意识,引导学生探索新的领域,增强学生的自信心,让学生相信自己通过数学概念的学习能够获得学好数学的新的能力,享受学习数学的获得感和满足感,从而从内心生成自豪感。全面结合小学课程内容、重难点和教材编制的知识经验基础和教学设计的理念,确定“用字母表示数”的教学目标以及教学重、难点,用调查的班级来实施教学,进行课堂实录。

#### (一) 活动阶段, 游戏引入

在活动阶段,一系列的活动能够调动学生的积极性,激发学生的好奇心和求知欲,学生能够在活动中知道字母可以表示具体的数。教师精心设计并展开活动,从生

活的角度出发,引导学生认识用字母表示数,体验到用字母表示数的重要性。课堂一开始,采用做游戏的方式导入新授的内容,学生既能初步感知用字母表示数,游戏又能够引起学生学习的兴趣。具体实践过程如下:

师:同学们,今天老师带来了几张扑克牌,上课之前,我们先来玩个游戏,请两位同学上来抽取一张扑克牌,看看哪位同学抽到的数字大。

师:抽中的4和抽到的8哪个大?

生1:8大,因为8大于4。

师:那么再请另外两位同学抽一次,抽到的K和抽到的6哪个大?

生2:抽到的K大。

师:为什么是抽到的K大呢,这个是怎么比较的?

生3:因为在扑克牌中的K表示13,13是大于6的。

师小结:在扑克牌游戏中,数字之间可以直接比较大小,而游戏中之所以涉及到字母类的J、Q、K之间的比较大小则是因为玩扑克游戏的人习惯性将这里的字母理解为数字。例如这里的K就表示13。因为13大于6,所以扑克牌中的K比较大及用字母K来表示一个具体的数13。(板书:表示确定的数)

师:扑克牌中,字母和字母如何比较大小呢?是不是每一个字母扑克牌均对应一个数字呢?

生4:字母和字母比较大小就是将两个字母都分别转化为其对应的数字,然后再比较大小。每一个字母都可以表示一个唯一的数字。

师:在生活当中,我们不仅仅是在玩扑克牌游戏时会涉及到用字母来表示一个具体的数。生活中的其他地方同样需要用字母来表示数,在数学领域接下来的知识当中,很多知识点都需要用到用字母来表示数,所以今天就让我们一起从生活实践出发,用数学的方法来学习用字母表示数。(板书课题:用字母表示数)

## (二) 过程阶段,动手感知

在过程阶段的教学,学生先进行自主探究,教师一步步引导学生思考,学生在探究中认识用含有字母的表达式表示简单的数量关系以及字母可以根据题意表示不同的数。在这个过程中,学生们像在玩游戏,调动了学生的积极性,全身心投入到课堂环节中。具体教学过程如下:

师:在刚刚的游戏中,几根小棒摆一个三角形呢?



生 1: 3 根。

师: 那几小棒才能摆两个三角形呢? 算式怎么表示?

生 2: 6 根, 用  $2 \times 3$  表示。

师: 摆 3 个三角形呢? 摆 4 个呢? 请同学们在自己的练习本上写一写。

师: 下面我来请同学说一说, 你是怎么写的。

生 3: 三个的话小棒的根数表示是  $3 \times 3$ , 四个的话可以表示为  $4 \times 3$ 。

(黑板上分步出现三角形, 教师在表格中填上板书: 1 个, 3 根; 2 个,  $2 \times 3$  根; 3 个,  $3 \times 3$  根; 4 个,  $4 \times 3$  根)

师: 如果老师这里有足够多的小棒, 按照这样的操作继续进行, 所要构建的三角形的数量和所需小棒之间的数量有什么关系呢? 请同学互相讨论说一说, 再派一个小组代表来回答。

生 4: 小棒的根数可以用三角形的个数乘以 3 表示。

师: 通过观察发现, 用具体的一个数字可以表示我们上面举的每一种情况。但是我们知道摆的三角形的个数有无数种, 那么也就有无数种具体的情况, 如果要想一一对应, 就需要有无数个数字。那么同学们想想, 我们能不能用一个算式或者一种表示方法来表示所有的具体情况呢? 并试着在自己练习本上写一写。

师: 在你们写的过程中, 老师巡视的时候看到了这样的表达:  $a \times 3$ , 同学们觉得这样的表示怎么样呢?

生 5: 这样表示比较便于理解, 一种表达却可以表示多种情况。

师: 这里的  $a$  可以表示多少个数呢? 你们能不能数数看, 这样数下去有没有尽头?

生 6: 1、2、3、4、5……。

师小结: 和扑克牌中的字母表示的不同, 在这个情况下所有的自然数都可以用  $a$  来表示, 可以认为  $a$  可以表示无数个数, 或者认为  $a$  可以表示一个无限变化的数。

(板书: 变化的数)

师: 如果老师想换个字母, 比如三角形的个数我们可不可以用字母  $b$  来表示呢? 如果可以的话那又该怎样表示它们之间的关系呢?

生 7: 可以用  $b$  表示, 那它们的关系可以表示为  $b \times 3$ 。

师: 现在我们知道了不同的字母是可以表示同一个数的, 那题目中如果告诉我们的是用掉小棒的根数为  $m$ , 这样的话可以摆出多少个三角形呢? 请同学们仔细思考。

生 8: 三角形的个数是  $m \div 3$ 。

师小结：因为小棒的根数和所摆的三角形关系没有变，他们都可以表示两者之间的数量关系。

### （三）对象阶段，巩固概念

通过活动、过程阶段，学生有了初步认识，字母可以表示具体的数，也可以表示不确定的数，会写出含有字母的表达式。这里通过游戏，提高了学生对字母式的理解，并通过师生之间的讨论以字母式形容出两个数的关系，在这一过程中体验来字母式关系的含义和它的形成过程。再利用学生数学中的路程问题，继续深化学生对字母式的运用。

对象阶段，将以前学过的知识与字母表达式相联系，学生对字母式有了一定认识后，再学习字母表达式乘号的略写。这一阶段，学生自学，增强学习数学的信心，体验到数学学习的乐趣。具体教学过程如下：

师：今天老师还带来一个魔术盒，请同学一起来看大屏幕上的演示，请同学们仔细观察并且思考，看看这个魔术盒神奇的地方在哪里儿。

生 1：一开始，进去的数字是 5，出来的时候变成了 10，进去的数字是 8，出来的数就变成了 13，进去的数字是 10，出来的就变成 15。

师：你观察的可真仔细呀！那同学们，你们能从中都发现了什么规律呢？那如果进去的是  $a$ ，出来的又会是哪一个数呢？

生 2：进去的每个数字的变化都是增加了 5。

师：如果进去的是不是一个确切的数字，而是字母  $a$  的话，出来的会是什么结果呢？

生 3：那就是  $a+5$ 。

师：看样子大家都发现了这其中的“奥秘”。老师想考考你们，如果盒子里出来的是字母  $a$ ，那是哪一个数进去的呢？

生 4：进去的数应该是  $a-5$ 。

师：刚刚无论是字母还是字母式都可以表示数，而且都可以表示不一样的数，但这之间永远有一个关系没发生任何改变，是哪种关系呢？

生 5：进去的数与出来的数之间永远相差 5，他们的差不变。

师：大家想一想和我们之前学过表示的方法，字母式有什么有点呢？

生 6：比较简洁，清楚的表示了两数之间的关系。

师：已知一条公路全长为 280 千米，小明开车从路的一头出发，行驶一段距离 50 千米后，剩余路程是  $280-50$ ，如果行驶 74.5 千米，如何用式子表示没走完的路程。

生 7:  $280-74.5$ 。

师：如果用字母  $b$  表示已经行驶的路程，剩下的路程式子又该怎么列呢？

生 8:  $280-b$ 。

师：老师想问问你们，这里字母  $b$  可以当作哪些数？

生 9: 自然数。

师：我们再来读读题目，仔细思考，有同学有不同的答案吗？

生 10: 可以表示 0 到 280 之间的任意数。

师强调：这里的  $b$  不能表示所有的数了，路程总长是 280 千米，这里的  $b$  是行驶的路程长度，只能表示大于 0，小于或者等于 280 的数。

师：如果  $b$  等于 120，剩下多少千米呢？

生 11: 用  $280-120$ ，等于 160，剩下 160 千米。

师：如果  $b$  等于 200 呢？

生 12: 用  $280-200$ ，等于 80，剩下 80 千米。

师：边长是  $a$  的正方形，怎样用字母  $a$  表示它的周长  $C$  和面积  $S$ ？

生:  $C=a \times 4$ ,  $S=a \times a$ 。

师：回答的真棒！请同学们打开课本第 100 页，自学课本第 100 页例题三下方的一段话，请同学来汇报交流。

生 13:  $a \times 4$  简写成  $4 \cdot a$ ，读作 4 乘  $a$ ，略写成  $4a$ ，略写数字写在字母前面。

生 14:  $a \times a$  简写成  $a \cdot a$ ，能写成  $a^2$ ，读作  $a$  的平方。

生 15:  $a$  和 1 相乘，直接写成  $a$ 。

师：一般我们略写写出含有字母的乘法式子。

#### （四）图式阶段，深化概念

图式阶段的学生已经在他们的脑海中建立了一个相对完整的心理表征。与生活中的实际例子相联系的过程是全面应用字母式，加深对“用字母表达数字”概念的学习，吸收概念的过程，是不断完善自身理解的过程。

（1）省略乘号，写出下面各式。

$$4 \times b \quad x \times 5 \quad a \times c \quad 1 \times x \quad x \times x$$

(2) 判断下面各题是否正确, 正确的打“√”, 错误的打“×”。

①  $5 \times b$  和  $b \times 5$  都可以写成  $5b$ 。( )

②  $8 + a$  可以写成  $8a$ 。( )

③  $c \times c$  可以写成  $2c$ 。( )

(3) 根据“妈妈比玲玲大 28 岁”填写下表。

玲玲/岁	1	2	3	4	...	$a$
妈妈/岁	$1+28$				...	

如果  $a=10$ , 妈妈多少岁? 如果  $a=15$  呢?

(4) 在括号里填写含有字母的式子。

① 一支铅笔  $a$  元, 一支钢笔比铅笔贵 5 元, 一支钢笔 ( ) 元。

② 小新每天读故事书 20 页,  $a$  天看了 ( ) 页。

③ 一辆公共汽车上原来有 20 人, 到花园小区站下去了  $x$  人, 又上来了  $y$  人。现在车上有 ( ) 人。

(5) 结合实际说一说生活中运用字母式的例子。(例如: 一张电影票的价格是 25 元,  $x$  个人买票需要花  $25x$  元。)

### 三、课堂效果分析

活动阶段, 用游戏引入, 激发了学生的学习兴趣; 过程阶段, 学生动手操作, 形成个体性概念构建过程; 对象阶段, 通过将学生的思维从具体化的对象转化为抽象化的对象; 图式阶段, 形成数学概念知识体系。在这一过程中学生应具备将思维中的抽象化数学概念以图式的形式构建出知识体系的能力, 课堂以学生为中心, 相对于传统教学方式能够取得更好的教学效果。因此, APOS 理论下指导的课堂教学相对于传统教学方式具有以下几点优势:

#### (一) 提高了学生课堂的参与度

课堂一开始, 活动阶段以抽扑克牌比较数字大小的游戏方式引入, 吸引了学生的注意力, 所有的学生都参与到了课堂活动中, 让学生对这节课的内容感兴趣, 全身心投入到课堂中。过程阶段, 学生通过游戏探究理解摆三角形和所需小棒之间的关系。通过小组合作游戏方式, 互相交流讨论之后发现字母的表达式。对象阶段, 学生在数

学游戏中感受用字母表示相差关系的量, 体验字母式的形成过程; 以学生自己当小老师的方式学习字母式中乘号的省略。图式阶段, 以课堂练习的方式, 巩固学生对所学数学概念的认识。整个课堂环节, 以学生为主体, 调动了学生学习的积极性, 提高了学生课堂的参与度。

## (二) 营造了良好的课堂氛围

APOS 理论把课堂分成了四个部分, 从活动阶段的游戏到过程阶段的动手操作、探究, 对象阶段的“神奇魔盒”到图式阶段的课堂练习, 在教师的引导下, 学生都能积极参与到课堂活动中去, 学生的学习兴趣以及学习的情绪方面都有了提高。每个环节, 学生对于教师的提问, 都乐于举手回答和教师互动, 提出自己的想法和理解。在轻松、愉悦的课堂氛围中, 教师和学生的相互配合下, 完成了一系列课堂活动。

## (三) 提高了学生对数学概念的理解

梳理学生课堂练习的答题情况, 少部分学生在练习时出现了错误。例如, 第一题, 省略乘号, 写出下面各式中, 有 23% 的学生把  $1 \times x$  写成了  $1x$ , 没有省略 1。13% 的学生把  $x \times x$  写成了  $2x$ , 13% 的学生把  $x \times x$  写成了  $x \cdot x$ , 没有真正理解乘号的省略规则。第二题的判断, 有 31% 的学生认为  $8+a$  可以写成  $8a$  是正确的, 认为字母式中的加号也是可以省略的。第三题, 妈妈比玲玲大 28 岁, 玲玲是  $a$  岁时, 要填妈妈的年纪, 表格中的最后一空写含有字母的表达式, 有一个学生把字母当成了具体的数, 学生都可以写出如果字母是具体的数, 妈妈的年纪具体的值。第四题在括号里填写含有字母的式子, 学生都能根据题目的意思写出含有字母的表达式, 错误在于有的字母式可以略写, 学生没有进行略写。第五题联系生活, 结合实例说一说生活中运用字母式的例子, 题目中所举的例子是有关于价格的, 学生受到这个影响出现了思维定式, 所写的基本上是有关价格的。

分别对练习全对的学生和有典型错误的学生进行开放式访谈, 了解学生做题时的状态和想法, 分析学生题目做错的原因。

笔者: 你觉得课堂练习的难度怎么样? 做题的时候需要注意些什么?

A 学生: 课堂练习挺简单的, 课堂上老师也都强调过这些知识点。在练习与字母相关的四则运算过程中, 只有乘法运算可以省略乘号, 并且在简写或略写过程中, 数

字一定要写在字母的前面。加减法和乘法计算过程中，符号不能省略。做题时需要仔细阅读题目，根据题目的意思写出含有字母的式子，要认真、细心地回答。

笔者：你为什么会觉得  $x \times x = 2x$ ？

B 学生：因为乘法这里的乘号可以省略，我看到乘号省略之后有两个  $x$ ，就写成了  $2x$ 。

笔者：你为什么会觉得判断题的第二题  $8+a$  可以写成  $8a$  是正确的呢？

C 学生：我把这里字母式中的加号理解成了也可以缩写，直接省略了加号，省略加号之后就变成了  $8a$ 。

笔者：第三题你为什么在表格的最后一空写  $10+28$ ？

D 学生：因为我看到下面的条件里如果  $a$  等于 10，我就以为这里的  $a$  是 10。

从课堂练习的情况来看，学生对用字母表示数有了基本认识，会用字母表示数和用含有字母的算式进行四则运算并且学会了用字母公式来代替传统的语言文字公式。但是在学习过程中，部分同学对四则运算中的乘法简写过程掌握的不够熟练，做题目容易出错。有些学生受到含有字母式子的乘法简便写法的影响，这种情况会出现在字母式子的加法中，省略加号的错误的情况。课后，学生需要复习巩固所学的知识。

## 第五章 APOS 理论视角下教学设计的建议

数学概念的学习是一个抽象的过程,在这个过程当中,学生要经历 APOS 理论中的四个阶段。教师要有序的展开各个教学环节,让学生充分经历“用字母表示数”概念产生、形成的整个过程。同时教师也要考虑阶段性目标,活动阶段初步认识概念;过程阶段反思活动;对象阶段构建概念;图式阶段建立模型。这是一个层层递进,反复提升,循序渐进的提高概念意识的过程。

学生的数学概念学习是需要不断重复、不断完善的,各知识之间的联系会越来越多,知识之间的结构也会越来越复杂。随后,学生还要会学习简单的方程、求解未知数,到了初、高中阶段,数学的学习更是离不开字母和字母式。结合目前小学数学概念教与学的具体现状,以及参考课题的研究,在今后开展小学数学概念教学,提出以下建议:

### 一、活动阶段,教师要善于挖掘教学素材

在活动阶段,教师要善于挖掘教学素材,激发学生的数学学习兴趣,营造良好的课堂氛围。例如,在教学“圆的认识”这一课时,活动阶段通过在“寻宝藏”的游戏情境中创造“圆”,宝藏离旗杆有三米长的距离,从而提出问题宝藏有可能在哪,能不能自己在纸上标一标。学生先思考,动手画一画,之后教师再在黑板上演示距离旗杆三米的点,点越来越多,逐渐变成了一个圆。学生通过这一游戏过程,初步感知关于圆的概念。<sup>①</sup>教师选取这一贴近学生生活的游戏作为情境导入,不仅引起了学生的思考,而且让学生产生了对这节课学习的兴趣。

“用字母表示数”的概念是比较抽象的,教师可以借助丰富多样的教学材料,也可以用游戏的方式来引入新课,调动学生学习的积极性。数学概念的学习是比较抽象,在以往的教学,都是以教师为中心,直接把数学概念灌输给学生。教师应该将数学概念学习与学生的实际生活相联系,挖掘生活中的教学资源,引发学生生活体会的共鸣。通过对数学学习实用性价值的肯定,提高自身的学习兴趣。活动阶段是一个引入概念、提升兴趣、指导概念学习的过程,控制好这一过程,能够显著提高学生的积极性,调动

<sup>①</sup> 姚进. 小学数学中“圆的认识”的教学设计研究[D].扬州大学,2016.

学生好奇心, 形成良好的小组讨论和师生互动的氛围。

## 二、过程阶段, 教师要注重学生自主探究的过程

在过程阶段, 教师要注重学生自主学习探究数学概念的过程, 学生能够感受和体验到数学学习的乐趣。例如, 三年级的学生刚开始认识几分之一的时候, 由于之前的学习过程中接触到的都是整数, 学生头脑中建立分数的表象是比较困难的, 教师应该设计活动让学生主动探究, 更好的理解概念。过程阶段, 张梅老师设计了五个不同的探究活动。活动一学生动手把圆形纸片均分成两份, 并将其一半涂色, 初步认识二分之一; 活动二教师要求学生折出长方形的二分之一, 展示学生不同折法; 活动三学生折出长方形的三分之一并涂色表示; 活动四学生自己动手创造出几分之一; 活动五选一个分数, 在纸片上折出这个分数。张梅老师在过程阶段注重学生自己动手操作、思考的过程, 让学生经历自主探究的过程, 激发学生数学思维, 探究所学概念特征。<sup>①</sup>

在“用字母表示数”这一节课的课堂上, 学生通过自己动手摆小棒, 探究、讨论发现三角形的三条边和所用的小棒之间的字母式关系。在教学过程的设计阶段, 教师应该给予学生动手操作、主动探究以及小组合作的时间, 让学生真正参与到课堂中去, 体验数学概念的形成过程, 乐于思考, 培养学生独立思考和动手操作的能力。

## 三、对象阶段, 教师要注重指导学生巩固所学概念

在对象阶段, 随着课堂教学过程的不断深入, 学生也对所学的数学概念有了深刻的认识, 这时, 教师要注意从简单的问题出发, 注重指导学生巩固所学概念。比如, 在教学“倍的认识”对象阶段时, 教师先要求学生用自己的话描述一下对“倍”的认识; 其次, 从杂乱的图中找出不同两个量之间的倍数关系, 再从一份数中找出“倍”的关系; 最后思维拓展, 学生看老师出示的图片, 各自说自己用什么样的方法找出来倍的关系。<sup>②</sup>教师一步步引导学生巩固所学概念, 学生能从对概念的感性认识上升到理性认识。

学生在学习“用字母表示数”的认识已逐步达到抽象的符号化的程度, 教师促使学生在再次经历概念形成的过程中加深对所学概念知识的理解。在这节课中, 在经历了过程阶段, 学生对字母式有了一定认识后, 对象阶段, 教师展示“神奇魔盒”, 学生

<sup>①</sup> 张梅. 基于 APOS 理论的“认识几分之一”教学设计研究[D]. 四川师范大学, 2020.

<sup>②</sup> 张熠. APOS 理论指导下的小学数学概念教学设计研究[D]. 宁波大学, 2018.



发现这其中的字母的表达形式，再次提出路程问题，让学生根据要求列出表达式以及说出在这里字母可以代表哪些数，最后，来学习字母表达式乘号的略写，加强学生概念认识的过程。从过程到对象阶段，是一个概念压缩的过程，教师要注重学生对所学概念的巩固应用。

#### 四、图式阶段，教师要注重完善学生的知识体系

图式阶段，学生在头脑中已经建立起相对完整的心理表征，教师要能够帮助学生回顾课堂所学的知识，通过正反的对比应用以及联系生活实践又可以提升用字母表示数的应用性，强化学生对用字母表示数概念的思维认知。例如，在“方程的认识”图式阶段的教学中，教师让学生先观察一组式子，判断它们是不是方程，并且说明理由，体会方程与等式的关系。再根据两者的联系，让学生画出它们的关系图，最后，学生自己写出几组方程。练习的设计层层递进，使学生对于方程概念的理解更为深刻，思维能力不断发展。既让学生应用了知识又培养了学生的创新思维。<sup>①</sup>学生可以通过图式阶段建立数学模型，同化概念，提高自身抽象思维能力，并且扩展数学知识体系。

---

<sup>①</sup> 何煜萌.基于 APOS 理论的小学数学方程概念教学研究[D].海南师范大学,2019.

## 结语

APOS 理论视角下“用字母表示数”的教学研究从实际出发,探讨小学数学概念的教学设计。以扬州市 Y 小学五年级的一个班为例,分析“用字母表示数”这一教学内容,根据学生对“用字母表示数”这一概念的认知基础出发,进行这一课的教学设计。APOS 理论可以通过指导教学设计的方式,营造思路清晰的学习过程,简化小学生理解数学概念的难度,提升概念教学的教学质量。

尽管针对教学实践和理论进行了大量研究,但是,中小学数学概念种类繁多,每一个概念都有其特点,APOS 理论视角下的教学设计需要解决的问题还有很多。在研究中,不足之处主要有以下几点:

第一,以小学数学“用字母表示数”这一课时作为切入点,存在研究范围小、教学效果验证不足的问题。

第二,受时间的限制,难以开展时间跨度更长的教学实践,进一步验证。

第三,展开教学实践的班级数量偏少,结论的适用性有待进一步验证。

研究以“用字母表示数”为例,APOS 理论对小学数学概念教学设计具有重要的指导意义,后续工作者可以在此基础上继续深入研究,从而帮助学生营造思路清晰的学习过程,简化小学生理解数学概念的难度,提升概念教学的教学质量。

## 参考文献

- [1]Dubinsky E, Mcdonald MA. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research[J].The Teaching and Learning of Mathematics at University Level:An ICMI Study, 2001:275-282.
- [2]Ed Dubinsky. Learning binary operation groups and subgroups[J]. The journal of mathematics Behavior, 1997, 3(16):187-239.
- [3]Brown, A. DeVries, D. Dubinsky,E.&Thomas,K.(1997). Learning binary operations, groups, and subgroups[J]. Journal of Mathematical Behavior, 1997,16(3):187-239.
- [4]李莉.学生学习数学概念的层次分析[J].数学教育学报,2002(03):12-15.
- [5]乔连全.APOS:一种建构主义的数学学习理论[J].全球教育展望,2001(03):16-18.
- [6]张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2004.
- [7]李善良.现代认知观下的数学概念学习与教学[M].南京:江苏教育出版社,2005.
- [8]鲍建生,周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海:上海教育出版社,2009.
- [9]Rafael Martínez-Planell,Angel Cruz Delgado. The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory[J]. Journal of Mathematical Behavior,2016,43.
- [10]Rafael Martínez-Planell,María Trigueros. Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables[J]. Journal of Mathematical Behavior,2019,55.
- [11]唐艳.基于 APOS 理论的数学概念教学设计[J].上海中学数学,2005(12):22-24.
- [12]周士民.基于 APOS 理论的高中函数教学研究[D].广西师范大学,2007.
- [13]周艳.基于 APOS 理论视角下的小学数学概念教学[J].小学教学参考,2019(35):94-95.
- [14]厉善.APOS 理论下高中直线方程教学研究[D].上海师范大学,2019.
- [15]宋伟楠.基于 APOS 理论的高中圆锥曲线教学设计研究[D].贵州师范大学,2017.
- [16]濮安山,史宁中.从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J].数学教育学报,2007(02):48-50.
- [17]李嘉昕.APOS 理论视角下小学数学概念教学案例研究[D].山西大学,2020.
- [18]卢清荣.APOS 理论下数学语言转换的学习与评价[J].教育科学论坛,2019(34):47-50.
- [19]管尤跃.基于 APOS 理论下的小学数学概念教学模式——以《三角形的认识》为例[J].小学教学研究,2017(19):8-11.

- [20]蒋萍红.小学数学概念教学存在的问题及解决策略[J].小学教学参考,2018(35):43-44.
- [21]刘洪侠.小学数学概念教学存在的问题及解决策略[J].新课程(小学),2019(12):157.
- [22]陈霖湘.小学数学概念教学存在的问题与实施策略[J].教师,2018(18):51-52.
- [23]邱伟星.小学数学概念教学策略例谈[J].小学教学参考,2019(29):94-95.
- [24]杨熠.数学概念教学方式的嬗变与思考——以“三角形定义”为例[J].小学教学(数学版),2020(11):16-18.
- [25]闫小颜.小学数学概念教学的育人价值及其过程结构研究[D].华东师范大学,2011.
- [26]朱桢.小学数学概念教学中的育人价值[J].新课程(小学),2015(09):46-47.
- [27]冉和香.基于变式理论的小学数学概念教学设计研究[D].西南大学,2020.
- [28]唐文蓉.创设情境,引发思考——苏教版小学数学《用字母表示数》教学案例分析[J].读与写(教育教学刊),2020,17(01):168.
- [29]徐海峰.立足已有认知经历探究过程——苏教版小学数学“用字母表示数”教学例谈[J].小学教学参考,2018(21):29.
- [30]吴雅萍.基于变构学习模型的小学数学“用字母表示数”教学设计研究[D].扬州大学,2017.
- [31]李大永.用字母表示数的教学设计与策略分析[J].中小学数学(小学版),2019(10):43-45.
- [32]Brown A, Devries D J, Dubinsky E, et al. Learning binary operations, groups, and subgroups[J]. Journal of Mathematical Behavior, 1997,16(3):187-239.
- [33]施良方.学习论[M].北京:人民教育出版社,2001.
- [34][荷兰]弗莱登塔尔.作为教育任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬译.上海:上海教育出版社,1973.
- [35]Ed Dubinsky, D. Tall. Advanced Mathematical Thinking and the Computer in Advanced Mathematical Thinking [M] (D.Tall,ed.),Kluwer 1991.
- [36]王光明,康玥媛.小学数学教学设计[M].北京:教育科学出版社,2014.
- [37]李开城,李文光.教学设计理论的新框架[J].中国电化教育,2001(6):6-8.
- [38]马兰,张文杰.教学设计[M].北京:高等教育出版社,2012.
- [39]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012.
- [40]李松林,巴登尼玛.新课程教学设计原理与方法[M].北京:人民教育出版社,2014.
- [41]张梅.基于 APOS 理论的“认识几分之一”教学设计研究[D].四川师范大学,2020.
- [42]陈阳蕾.基于 APOS 理论的小学分数概念教学策略研究[D].鲁东大学,2020.
- [43]刘祥.基于 APOS 理论下的小学数学概念教学的研究——以俞正强老师教学“分数的初步认识”一课为例[J].小学教学参考,2020(11):22-24.

[44] 谢超琪. APOS 理论下的小学数学概念教学设计研究[D]. 上海师范大学, 2020.

[45] 卢特. 以有效学习材料推动数学概念教学的策略[J]. 小学教学设计, 2021(Z2): 66-68.

## 附录：五年级“用字母表示数”的前测问卷

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 性别\_\_\_\_\_

亲爱的同学：

你好！本次调查是为了了解五年级学生“用字母表示数”学习的基本知识经验。本问卷只为科学研究之用，不是评价你学习的好坏。请你认真阅读每一道题目，按照题目的要求，认真回答每一个问题。谢谢你支持与合作！

1. 同学们都知道字母 KFC 表示肯德基，那你们觉得字母可不可以表示数字呢？

A. 可以      B. 不可以      C. 不清楚

2. 小明步行  $a$  千米到达学校，这里的“ $a$ ”表示什么？“ $a$ ”表示的数有多少个？3. 小红的年龄是  $a$  岁，小芳的年龄是  $a+3$  岁，谁的年龄大？4. 如果正方形的边长是  $a$ ，你能写出正方形的周长和面积吗？

5. 从数量的角度来看，用字母表示数有什么特点？和以前学的具体的数有什么不同？

## 致谢

行文至此，落笔为终，这意味着三年的硕士研究生学习生活转眼间即将进入了尾声。始于 2018 初秋，终于 2021 初夏。记忆往昔，求真寻知之甘苦，先生教会之真切，同窗情谊之深刻。乃至扬大之一楼一字、一草一木，皆泛起点滴悲喜之情，就如同昨日一样，都历历在目。在这一路上的努力奋斗，为青春拼搏的岁月将成为我一生中最宝贵的记忆。而我也要向所有曾陪伴我、关心我、照顾过我的人道一声感谢，让我能够在这一路上勇往直前，与君相识，三生有幸。

古之学者必有师，师者，所以传道授业解惑也。首先，我要特别感谢的是我的导师徐建星老师。这三年的求学中，徐老师对我一路指导，谆谆教诲，不仅传授丰富的专业知识，更是教导我许多为人处世的道理。本篇论文的工作是在徐老师的悉心指导下完成的，从论文的选题、收集、撰写到最后的终稿，徐老师都倾注了大量的时间和精力，及时地指导并且帮助我解决所遇到的各种难题，使得我的毕业论文得以顺利完成的重要保证。毕业在即，谨向尊敬的徐老师致以最真挚的感谢和衷心的祝福，希望徐老师身体健康，事事顺心。

其次，我要感谢我的家人，在我二十几年的求学历程中，离不开家人的鼓励和支持。因为有了他们的辛勤劳作和无私奉献，使我衣食无忧，让我全身心投入到学习中去，并且能够顺利地完成学业，顺利毕业。家人是我求学路上的坚强后盾，他们的鼓励和支持永远都是我前进的最大动力。养育之恩，无法回报，只想不断努力成为你们最大的骄傲。

最后，我要感谢我的朋友们陪我度过了这三年的研究生生活，在一起进步的路上带给我许多的欢乐和感动，感谢你们这三年对我的陪伴和照顾，在生活和学习中都给予了我很多鼓励和帮助。最美的是相遇，最难的是重逢，今日乐享乐，别后莫相忘，希望我们可以在未来有更美好的相遇。

本论文的完成并非终点，前路漫漫，在今后的岁月里，无论做任何事情，都要继续再接再厉，不断成就自己的梦想和更加精彩的人生！为祖国的教育事业贡献自己的一份力量，努力成为一名优秀的人民教师！