

代数思维在数学课堂中的落地生根

——以“用字母表示数”为例

江苏省江阴市璜土实验小学 马晓华

【摘要】数学思维是数学核心素养的集中体现,其中代数思维相较于算术思维,更侧重于关系的符号化、结构化、抽象化和概括化。小学数学学习,要在算术思维的基础上,更加注重代数思维的培养与发展,深入培养学生的数学思维品质,为学生后续进一步学习函数等重要知识打下坚实的基础。本文围绕“用字母表示数”这节课,阐述如何让代数思维真正在数学课堂中落地生根。

【关键词】符号意识 代数思维 代数思想

“符号意识”是新课标提出的核心概念之一。“符号意识”主要是指能够理解并运用符号表示数、数量关系和变化规律,知道使用符号可以进行运算和推理,得到的结论具有一般性。培养符号意识可以促进代数思维的衍生与发展。“用字母表示数”是苏教版数学五年级上册的内容,这是一节培养学生“符号意识”的基础课,也是学生由具体的“算术语言”向抽象的“代数语言”过渡的开始,是后续学生学习代数方程、代数式、函数等代数知识的重要基础。下面,笔者结合本节课的实际教学,具体谈一谈如何在教与学过程中让代数思维在小学数学课堂中落地生根。

一、代数思维与算术思维的区别

谈到代数思维,首先让人想到的必定是算术思维,它们是一组相对的概念。小学低、中年级的数学内容在思维方式上大多倾向于算术思维,算术思维的对象主要是数字及其计算与折合,它侧重于程序性思维,着重利用数量计算求出答案,这个过程具有情境性、特殊性和计算性等特点。与其不同的是,代数思维的对象则主要是代数式及其运算与变换,它本质上是一种关系思维,其核心是一般化思想,即发现一般化的关系和结构以及明确这些关系与结构之间的联系。代数思维的运算过程是结构性的,侧重的是关系的符号化。结构化、符号化、抽象化和概括化是代数思维的特征。

例如:红花有15朵,红花的数量是黄花的3倍多6朵,求黄花有几朵?对于这个实际问题,运用算术思维应该这样解答: $15-6=9$ (朵), $9\div3=3$ (朵)。运用代数思维

则寻求的是结构化的数量关系,其思维方式是:设黄花有 x 朵,则 $3x+6=15$ 。简单来说,算术思维是一题一法,注重计算,而代数思维就是寻求通法、注重表征。

二、代数思维在课堂中的落实

(一)以概括的思想驱动代数思维

代数思维主要包含概括的思想、等价的观念和变化与函数的思想,用字母表示数这一创举就是要能体现代数思想的高度概括性与简洁性。纵观代数的发展史,从早期用文字来表示一个代数问题解法的修辞代数,到古希腊数学家丢番图使用希腊字母“ ζ ”来表示未知数的缩略代数,再到法国数学家韦达开创用元音字母表示未知量、用辅音字母表示已知量的符号代数,都鲜明地表明用字母表示数是代数史上一次伟大的跨越,也是代数发展的一个必然趋势。其最大的价值就是把数学中的无限数字、数量用一个简单字母高度地归纳概括了出来。代数就是用符号来代替数量与式子,一个“代”字,所表达的就应该是概括的思想。教师在教学“青蛙儿歌”这道例题时,就应该以概括的思想为抓手,以概括的思想驱动代数思维,让学生初步感知代数思维。

首先从“1只青蛙4条腿”出发,引导学生继续说下去:2只青蛙__条腿、3只青蛙__条腿、10只青蛙__条腿、120只青蛙__条腿、1000只青蛙__条腿。然后引导学生思考并提出问题:“像这样说下去说得完吗?有什么办法能把这样的意思简单地概括出来呢?”这样一来,学生就会从概括总结规律的角度来思考问题,不同思维水平的学生都能用自己的数学语言来描述这个问题,为后续开

放性的深入探究奠定基础。大部分学生都能想到用一个字母来表示青蛙的数量,有“ a 只青蛙、 b 只青蛙、 n 只青蛙……”。对比满屏的数,字母会带给学生一种视觉和思维的强烈冲击。在这里,用字母表示数首先体现出来的作用就是高度的概括性,其次才是字母可以表示未知变化的数。这样学生就能初步感知用字母概括变化的数也是一种简洁独特的数学语言。

(二) 创开放的课堂延展代数思维

学生是学习的主人,教师只是学习的组织者、引导者与合作者。“用字母表示数”这节课的知识内容非常多,许多教师为了在有限的 40 分钟把教学内容上“完整”,课堂安排非常紧凑,全程牵着学生往前“赶”,想让学生马上“吃饱吃透”,因此一节课结束,教师以为课堂内容已经全部讲完了,实际上学生已经在字母中迷失了。真正的好的数学课堂绝不应该是这样的,教师控制得太多,学生自主权就会太少,所以教师要想方设法创设能给予学生自主思考、自主探究、自主实践的机会与空间,真正把学习的主动权交还给学生,让学生在开放的数学课堂中延展代数思维。

为了实现这一目标,在“青蛙儿歌”这个新授环节,笔者这样处理:

学生已经从概括思想的角度尝试用字母来代替未知的青蛙数量,所以笔者汇总学生可能会呈现的三种语言描述:“ a 只青蛙 a 条腿”“ a 只青蛙 b 条腿”“ a 只青蛙 $a \times 4$ 条腿”。接下来不是急于判定好与不好,而是把大问题提出来:“大家仔细读一读、比一比,你们有什么想说的?”然后组织学生小组讨论并交流想法,此时一定要给足时间。在汇报想法时,讨论探究的重点有两个:一个是“ a 只青蛙有 $a \times 4$ 条腿”是怎样思考出来的?另外一个“ a 只青蛙 b 条腿”这种表示方法是否正确?课堂上,对于第一个问题,大家都没有意见,一致认为可以用“ $a \times 4$ ”来表示青蛙腿的数量。让笔者意想不到的是,对于第二个问题,大家展开了激烈的争论。有学生说:“ a 和 b 是两个不同的字母,肯定可以表示两个不同的数量,所以正确。”也有学生说:“既然确定是 a 只青蛙了,那它的腿数一定要是 a 的 4 倍,只能是 $a \times 4$,不能随随便便找个不同的字母来代替它的腿数。”还有学生反驳道:“这里的 b 可以看作 $a \times 4$ 。”在这个问题上,学生的思维有点脱离了笔者课前的教学预设,让笔者措手不及。关于“ a 只青蛙 b 条腿”这种表示方式到底对不对,其实很多教师都有不同的看法。笔者认为,对与不对得看角度问题,站在本节课的角度,因为是符号意识与代数思维的启蒙课,讲得就应该直观浅显一点,“ $a \times 4$ ”表示腿的数量肯定比“ b ”这个字母好,因为“ b ”对初学者来说是不确定

的、任意的,是和“ a ”毫无关系的,所以不认可。但是随着代数思想的深入,站在等量替换的角度,也可以认为当“ $b = a \times 4$ ”时,这句话也是成立的。

开放的课堂不应该就是像这样的吗?如果知识的探究能达到这个高度,学生对代数思想就会有更高、更深层次的理解和感悟。

(三) 从变化的角度内化代数思维

德国数学家开普勒说过,数学就是研究千变万化中不变的关系!在“用字母表示数”这节课中,字母或含有字母的式子在很多情境中主要表示的是一些变化未知的数量,正因为数量是不确定的,所以我们需要用符号来概括表示出来。但“变化”又是最让学生头疼的,所以教师又需要引导学生在变化中寻找一些规律,即所谓“不变的东西”,这样才能把数学问题的本质凸显出来,才能有利于我们找到分析问题和解决问题的思路和方法。根据“变”与“不变”的关系,为了能让学生在代数思维下体会到数学的本质,为了更好地内化学生的代数思维,笔者又选取了“年龄”这个素材来展开更深入的教学。

笔者以某一家三口的年龄为研究对象,先假设爸爸 x 岁,儿子 y 岁,给出爸爸比儿子大 23 岁的条件,所以儿子的年龄还可以用“ $x-23$ ”来表示。在比较的过程中,让学生再次进一步体会字母或含有字母的式子都可以表示未知变化的数量。然后 x 取不同的数值,代入计算儿子的年龄,感受两人年龄不断在变化,但两人的年龄差这个数量关系永远不变。紧接着给出妈妈的年龄“ $x+1$ ”,再次比较并观察三人的年龄,从代数式上找到年龄的关系。最后,改变代数设定的思路,假设儿子年龄是 x 岁,那爸爸、妈妈的年龄怎么表示?接着对这两组含有字母的式子进行多角度分析比较,得出三人的年龄不断在变化,字母 x 的对象也可以不断变化,作为结果的字母式也会随之而变化,但有一样是自始至终不会改变的,学生异口同声回应道:“年龄差!”

站在更高的层次,从变化的角度来研究数学问题,使学生进一步感受字母和含有字母的式子这种“别扭”的数学语言具有其独特的优势和价值。变只是表象,不变才是我们要研究的本质,代数思维就是研究数学变化中不变关系最强有力的武器。

(四) 设梯度的练习生根代数思维

练习是学生训练技能、掌握知识的重要方法。具有层次性、递进性和综合性的练习才是有效的练习,才能真正发展学生的数学核心素养。设计有效的练习就是对练习的内容、形式、数量等进行周密的考虑,使练习真正起到巩固知识、发展思维能力的作

为了让学生在练习中进一步生根代数思维,形成代

数思想,笔者把本节课的练习分成了“基础练习”“综合练习”“拓展练习”三大板块。“基础练习”重点训练用含有字母的式子表示数量关系;“综合练习”在紧抓数量关系的同时,强调代入数值计算;“拓展练习”以训练学生数学思维为目标。在拓展练习里,笔者设计了这样一个问题:“三个连续的自然数,其中一个数是 m ,则三个自然数的和是多少?”这个问题在这节课里绝对是一个难题,旨在考查学生多方面的能力。这里不仅要能运用代数思想解决问题,还涉及分类讨论的思想。问题起点很高,但对学生思维能力的促进有好处。学生就应该在这样的日常训练中不断提升发现、分析和解决问题的能力,

发展数学思维,生根代数思维,真正让代数思想成为解决数学问题的常规武器。

总之,在“用字母表示数”这节课,因为抽象思维的升级,学生必须改变固有的思维和认知方式,体会符号意识与代数思想。教师要以这节课为抓手,为学生精准把脉,精心设计教学环节,让学生的代数思维在课堂与练习中自然地生成和自由地生长。

代数思维的生成与发展绝不是一朝一夕的事情,教师要遵循学生的学习心理特点,在学生的认知难点上着重下功夫,帮助学生真正理解代数思维,让代数思维切实在数学课堂中落地生根。♪

XIAOXUE JIAOXUE YANJIU

(上接第82页)
基于主题意义的单元整体教学是整合英语课程内容六要素,落实英语学习活动观,发展学生英语学科核心素养的有效途径。因此,教师应该着眼于单元整体,立足于

学情,将主题意义的探究细化落实到每一个课时,巧妙运用“补白教材场景,创设话题情境,融合课外资源”的策略,引领学生深挖文本,在语言学习中感知主题意义,促进自身核心素养综合发展。♪

表 5 第四课时课内外融合内容及主题意义

教学环节	融合内容	教学活动	问题设置	主题意义
Step 1: Know about food	课内外关于“蔬菜、水果、肉、饮料”的词汇	Brainstorm Happy puzzle	Why is Chinese food so various?	We Chinese people have great creativity and we are good at combining different food together. So, different combinations of food lead to various Chinese dishes.
Step 2: cook a meal	Prepare the food: Checkout time 和课外食物词汇	Look and write Think and guess		
	Make a menu: 将不同食材组合成菜肴,各种家常菜英文表达	Let's link(连连看)		
Step 3: Promote Chinese food	Cook a meal: Checkout time 和菜肴名称、烹饪活动	Happy acting Ask and answer	Why is Chinese food so various?	China is so big. Different places have different famous dishes.
	Culture time 和中国各地特色美食的视频、图片和阅读材料(见图3)	Watch and choose Read and answer Look and mark		
	Writing time: 整合课内外词汇及句型进行整体性输出	Make a poster Show your poster	What should we do?	As Chinese people, we should have confidence in Chinese food culture and promote it to all over the world.